Algebra3 matematikus szakirány

1. feladatsor

2016. szeptember 15.

1. Igazoljuk, hogy ha egy csoportban minden elem rendje legfeljebb 2, akkor a csoport kommutatív.

2. Mely n egészekre és K testekre lesz a $\mathrm{GL}_n(K)$ csoport kommutatív?

3.* Igazoljuk, hogy tetszőleges test multiplikatív csoportjának tetszőleges véges részcsoportja ciklikus.

4. Tekintsük a D_4 diédercsoportot, mint a sík egybevágósági transzformációinak részcsoportját. Adjuk meg a sík pontjainak orbitját és stabilizátorát.

5. Keressük meg azt a részcsoportot S_4-ben, amelyet a Cayley-tétel bizonyítása a Klein-csoporthoz, illetve a Z_4 csoporthoz rendel.

6. Mennyi $\mathrm{Aut}(Q)$ rendje? *Melyik csoporttal izomorf?

7.* Bizonyítsuk be, hogy ha G egy végtelen Abel csoport, melyben minden valódi részcsoport véges, akkor $G \cong Z_{p^\infty}$ valamilyen p prímszámra, ahol Z_{p^∞} a p-hatványrendű komplex egységgyökök csoportja.

8. Legyen X legalább kételemű véges halmaz. Igazoljuk, hogy S_X minden tranzitív részcsoportjában van fixpontmentes elem. Elhagyható-e a tranzitivitás feltétele?

9. Adjunk meg $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$-ben egy Q-val izomorf részcsoportot.

10. Határozzuk meg a sík egybevágósági transzformációiból álló véges csoportokat.

11.* Igazoljuk, hogy $n \geq 3$ esetén A_n minden eleme (azaz minden páros permutáció) előáll hármasciklusok szorzataként.