Algebra3 matematikus 1. ZH megoldások (2012. október 26.)

1. Azokat az $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ mátrixokat keressük, melyekre $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ (bal annullátor). Tehát a bal annullátor $\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C}) \mid a+b=c+d=0\right\}$, a jobb annullátor pedig (hasonló számolással) $\left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C})\right\}$.

2. Azt kell belátni, hogy minden $a+bi$ $(a,b \in \mathbb{Z})$ Gauß-egészhez egyértelműen létezik olyan $0 \le k \le 9$ egész szám, melyre $a+bi \equiv k \pmod{3+i}$. A létezéshez vegyük észre, hogy egyrészt $a+bi \equiv a-3b \pmod{3+i}$, másrészt $10 = (3-i)(3+i) \in (3+i)$. Az egyértelműséghez tegyük fel, hogy valamilyen $0 \le k_1 < k_2 \le 9$-re $3+i \mid k_2-k_1$. Ekkor $10 = N(3+i) \mid N(k_2-k_1) = (k_2-k_1)^2$, ami ellentmondás, hiszen $0 < k_2-k_1 < 10$.

3. Legyen R egy 4-elemű gyűrű. Ekkor a véges Abel-csoportok alaptétele szerint R additív csoportja kétféle lehet izomorfia erejéig: vagy Z_4 vagy $Z_2 \times Z_2$. Az első esetben (mivel a gyűrű egységelemes) a szorzást már egyértelműen meghatározza az összeadás, hiszen $(\underbrace{1+\cdots+1}_{k})(\underbrace{1+\cdots+1}_{n}) = \underbrace{1\cdot 1+\cdots+1\cdot 1}_{kn}$, és $1\cdot 1 = 1$, ha 1 az egységelem. Vegyük észre továbbá, hogy 1 szükségképpen a Z_4-gyel izomorf additív csoport egyik generátoreleme, hiszen ha $1 = a+a$, akkor $1\cdot 1 = (a+a)(a+a) = a^2+a^2+a^2+a^2 = 0$, ami abszurd.

A második esetben az additív csoport $Z_2 \times Z_2$-vel izomorf, tehát $R = \{0, 1, a, b = 1+a\}$. A kérdés csak az, hogy mennyi a^2, mivel ez már meghatározza a szorzástáblázat többi elemét. 4 eset van: (i) $a^2 = 0 \Rightarrow b^2 = a^2+2a+1 = 1$, (ii) $a^2 = 1 \Rightarrow b^2 = a^2+2a+1 = 0$, (iii) $a^2 = a \Rightarrow b^2 = a^2+2a+1 = b$, (iv) $a^2 = a+1 \Rightarrow b^2 = a^2+2a+1 = b+1$. Ezek közül az első két gyűrű izomorf (az izomorfizmust a és b megcserélése adja).

Tehát izomorfia erejéig 4 ilyen gyűrű van: $\mathbb{Z}/(4)$, $\mathbb{Z}/(2)[a]/(a^2)$, $\mathbb{Z}/(2)[a]/(a^2+a)$ és $\mathbb{Z}/(2)[a]/(a^2+a+1)$.

4. Az $\varphi\colon M \to M$ R-lineáris leképezéseket keressük. Mivel K-t azonosíthatjuk a skalármátrixokkal (amik benne vannak R-ben), ezért minden ilyen leképezés K-lineáris is, azaz egy $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $(a,b,c,d \in K)$ mátrixszal való szorzásnak felel meg. Vegyük észre, hogy az R-linearitás azt jelenti, hogy $r \in R$-re és $m \in M$-re $\varphi(rm) = r\varphi(m)$, azaz ha $r = \begin{pmatrix} u & v \\ 0 & z \end{pmatrix}$, akkor $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u & v \\ 0 & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & v \\ 0 & z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Az $u_1 = z_1 = 0$, $v_1 = 1$, ill. $u_2 = v_2 = 0$, $z_2 = 1$ választásokkal azt kapjuk, hogy $a = d$ és $b = c = 0$, azaz $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ skalármátrix. A skalármátrixok pedig valóban felcserélhetők minden mátrixszal, tehát $\mathrm{End}_R(M)$ izomorf a skalármátrixok gyűrűjével, azaz K-val, speciálisan test. A másik állításhoz vegyük észre, hogy $\{\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \mid x \in K\}$ részmodulus M-ben, tehát M nem egyszerű.

Megjegyzés: A feladat azon múlt (és úgy készült), hogy M két nemizomorf egyszerű modulusnak a nemtriviális bővítése, azaz van egy

$$0 \to A \xrightarrow{\alpha} M \xrightarrow{\beta} B \to 0$$

nem hasadó rövid egzakt sorozat, ahol A és B nemizomorf egyszerű modulusok. Tehát íme egy koncepciózusabb bizonyítás (amiből sajnos csak annyi jön ki, hogy $\mathrm{End}_R(M)$ ferdetest): Először belátjuk, hogy M egyetlen nemtriviális részmodulusa $\mathrm{Im}(\alpha) = \mathrm{Ker}(\beta)$, ha M teljesíti a fenti feltételt. Legyen ugyanis $0 \neq C \lneq M$ részmodulus. Mivel A egyszerű, ezért $\mathrm{Im}(\alpha)$ is az, tehát $C \cap \mathrm{Im}(\alpha) = 0$ vagy $\mathrm{Im}(\alpha)$. Az első esetben $\beta_{|C}$ injektív (hiszen $\mathrm{Ker}(\beta) = \mathrm{Im}(\alpha)$), és mivel B is egyszerű, ezért $\beta(C) = B$, azaz β egy izomorfizmust ad C és B között. Ez esetben $\beta_{|C}$ inverze egy $B \to M$ szelést adna, amiről feltettük, hogy nem létezik. Tehát $\mathrm{Im}(\alpha) \subseteq C$, azaz $\mathrm{Im}(\alpha) = C$, hiszen $B \cong M/\mathrm{Im}(\alpha)$ egyszerű. Ha most $\varphi \in \mathrm{End}_R(M)$ egy nem nulla endomorfizmus, akkor φ vagy injektív, vagy magja az egyetlen nemtriviális részmodulus. Előbbi esetben $\mathrm{Im}(\varphi) \cong M$ nem egyszerű, ezért az egész M (hiszen a kép se nem 0, se nem $\mathrm{Ker}(\beta)$, mert utóbbi egyszerű). A másik esetben $\mathrm{Im}(\varphi) \cong M/\mathrm{Ker}(\varphi) = M/\mathrm{Ker}(\beta) \cong B$ egyszerű, tehát a kép csak $\mathrm{Im}(\alpha)$ lehetne, ami ellentmondás, hiszen A és B nem izomorfak. Azt kaptuk, hogy ha φ nem nulla endomorfizmus, akkor bijektív, tehát invertálható. HF ellenőrizni, hogy a mi esetünkben a rész és a faktor valóban nemizomorf egyszerű modulusok.

5. Legyen $x = \sum_{i=0}^{\infty} x_i p^i \in \mathbb{Z}_p$. Rendeljük hozzá x-hez a $\varphi_x \colon \mu_{p^\infty} \to \mu_{p^\infty}$ leképezést a következőképpen: ha $\zeta_k \in \mu_{p\infty}$ egy primitív p^k-adik egységgyök, akkor legyen $\varphi_x(\zeta_k) := \zeta_k^x := \zeta_k^{\sum_{i=0}^{k-1} x_i p^i}$. Ekkor φ_x nyilván egy homomorfizmus, másrészt az $\varphi_{x+y}(\zeta_k) = \varphi_x(\zeta_k)\varphi_y(\zeta_k)$, azaz az $x \mapsto \varphi_x$ leképezés egy $\mathbb{Z}_p \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mu_{p^\infty}, \mu_{p^\infty})$ homomorfizmus. Mivel $k \geq 0$ tetszőleges, ezért ez a homomorfizmus injektív. Másrészt ha $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mu_{p^\infty}, \mu_{p^\infty})$ egy homorfizmus, akkor $\varphi(\zeta_k)$ is egy p^k-adik egységgyök. Mivel μ_{p^k} csoport ciklikus, egyik generátora ζ_k, ezért $\varphi(\zeta_k) = \zeta^{x_{\varphi,k}}$ alkalmas $0 \leq x_{\varphi,k} \leq p^k - 1$ egész számra. Vegyük észre, hogy ekkor $\varphi(\zeta) = \zeta^{x_{\varphi,k}}$ tetszőleges $\zeta \in \mu_{p^k}$-ra, hiszen φ multiplikatív és ζ valahanyadik hatványa ζ_k-nak. Speciálisan ha $m < k$, akkor $\zeta_m^{x_{\varphi,m}} = \varphi(\zeta_m) = \zeta_m^{x_{\varphi,k}}$, azaz $x_{\varphi,m} \equiv x_{\varphi,k} \pmod{p^m}$, azaz $|x_{\varphi,k} - x_{\varphi,m}|_p \leq p^{-m}$. Tehát az $(x_{\varphi,k})_{k\in\mathbb{N}}$ sorozat Cauchy, ezért konvergens $\mathbb{Q}_p$-ben, és mivel minden tagjának abszolútértéke legfeljebb 1, ezért a határérték $\mathbb{Z}_p$-beli. Ha x_φ-vel jelöljük a limeszt, akkor $\varphi = \varphi_{x_\varphi}$ azaz a $x \to \varphi_x$ leképezés szürjektív, így izomorfizmus.

6. Jelöljük $Z(R)$-rel a centrumot (ez egy részgyűrű), és legyen $a, b \in R$ tetszőleges. Ekkor $(a+b)^2 - (a+b) - (a^2 - a) - (b^2 - b) = ab + ba \in Z(R)$, speciálisan $a^2b + aba = a(ab+ba) = (ab+ba)a = ba^2 + aba$. Ebből $a^2b = ba^2$, ami pont azt jelenti, hogy $a^2 \in Z(R)$, hiszen b tetszőleges volt. Így $a = a^2 - (a^2 - a) \in Z(R)$, azaz $R = Z(R)$ kommutatív, hiszen a is tetszőleges volt.

7. Legyen R Noether. Mivel minden végesen generált modulus előáll, mint egy végesen generált szabad modulus faktormodulusa, és végesen generált modulus homomorf képe is végesen generált (a generátorok képei generálják), ezért az állítást elég belátni szabad modulusra. Tehát legyen $M \leq {}_RR^k = \underbrace{{}_RR \oplus \cdots \oplus {}_RR}_{k}$ egy részmodulus. Jelöljük továbbá π_i-vel az i-edik koordinátára való vetítést ($1 \leq i \leq k$). Az állítást k szerinti indukcióval bizonyítjuk. Ha $k = 1$, akkor M egy ideál R-ben, ami végesen generált, hiszen R noether. Tegyük fel, hogy az állítást tudjuk $k-1$-rangú szabad modulusra. Ekkor $M \cap \mathrm{Ker}(\pi_1)$ végesen generált, hiszen ${}_RR^{k-1}$-nek része. Legyen $a_1, \ldots, a_t$ egy generátorrendszer $M \cap \mathrm{Ker}(\pi_1)$-ben. Másrészt $\pi_1(M) \leq {}_RR$ is végesen generált a $k = 1$ eset miatt, ezért válasszuk $b_1, \ldots, b_s \in M$-et úgy, hogy $\pi_1(b_1), \ldots, \pi_1(b_s)$ generálja $\pi_1(M)$-et. Ekkor $a_1, \ldots, a_t, b_1, \ldots, b_s$ generálja M-et: Legyen $m \in M$. Ekkor $\pi_1(m)$ felírható $\pi_1(m) = \sum_{j=1}^{s} r_j \pi_1(b_j)$ alakban, ezért $m - \sum_{j=1}^{s} r_j b_j \in M \cap \mathrm{Ker}(\pi_1)$, tehát $m - \sum_{j=1}^{s} r_j b_j = \sum_{i=1}^{t} r_i' a_i$ alkalmas $r_j, r_i' \in R$ elemekkel. A megfordítás triviális, hiszen ${}_RR$ részmodulusai épp az ideálok.