Algebra3 matematikus szakirány

9. gyakorlat

2012. november 23.

1. Nevezzük egy M modulus $L \leq M$ részmodulusát *lényegesnek* (angolul: essential, jel.: $L \leq_e M$), ha minden $0 \neq N \leq M$ részmodulusra $L \cap N \neq 0$. Bizonyítsuk be, hogy minden $N \leq M$ részmodulushoz van olyan $N' \leq M$ részmodulus, melyre $N \cap N' = 0$ és $N \oplus N' \cong N + N'$ lényeges részmodulusa M-nek.

2. Nevezzük egy M modulus egyszerű részmodulusainak összegét M *talpának* (angolul: socle, jel.: $\mathrm{soc}(M)$). Bizonyítsuk be, hogy $\mathrm{soc}(M) = \bigcap_{L \leq_e M} L$.

3. Az M modulus pontosan akkor féligegyszerű, ha nincs valódi lényeges részmodulusa.

4. Egy G csoport *talpa* alatt a minimális normálosztói által generált részcsoportot értjük (jel.: $\mathrm{soc}(G)$). Bizonyítsuk be, hogy $\mathrm{soc}(G)$ *karakterisztikus egyszerű* csoportok direkt szorzata (azaz olyan csoportoké, amiknek nincsen nemtriviális karakterisztikus részcsoportja).

5. Igazoljuk, hogy

   (i) Izomorf egyszerű csoportok direkt szorzata karakterisztikusan egyszerű.

   (ii) Ha a G karakterisztikusan egyszerű csoportnak van minimális normálosztója (pl. G véges), akkor G izomorf egyszerű csoportok direkt szorzata.

6. (i) Mutassunk példát olyan karakterisztikusan egyszerű csoportra, aminek nincs minimális részcsoportja.

   (ii) Mutassunk példát olyan modulusra, aminek nincs egyszerű részmodulusa.

---

7. Igazoljuk, hogy $J(R/J(R)) = 0$.

8. Igazoljuk, hogy $J(R)$-ben nincs nem nulla idempotens elem.

9. Mi $\mathbb{Z}_p$ Jacobson-radikálja? És $\mathbb{Z}_p[[X]]$-é? (Itt $\mathbb{Z}_p$ a p-adikus egészek gyűrűjét jelöli.)

10. Legyen K test. Mi a K feletti $n \times n$-es felsőháromszög-mátrixok gyűrűjének Jacobson-radikálja?

11. Igazoljuk, hogy egységelemes gyűrű Jacobson-radikálja csak akkor lehet direkt összeadandó, ha 0.

12. Adjunk példát olyan nem végesen generált M modulusra alkalmas R gyűrű felett, amire nem igaz a Nakayama lemma állítása.

---

13. Egy M R-modulusról azt mondjuk, hogy artin, ha részmodulusaira teljesül a minimumfeltétel. Hasonlóképp M noether, ha részmodulusaira teljesül a maximumfeltétel. Legyen $0 \to A \to B \to C \to 0$ (baloldali) R-modulusoknak egy rövid egzakt sorozata. Igazoljuk, hogy

    $a)$ B artin $\Leftrightarrow$ A és C artin.

b) B noether $\Leftrightarrow$ A és C noether.

14. M noether és artin $\Leftrightarrow$ M-nek van véges kompozíciólánca (ezt úgy is nevezik, hogy M véges hosszú).

15. Ha R balnoether (balartin) és M végesen generált baloldali R-modulus, akkor M noether (artin).

---

16. Legyen M egy (R, S) bimodulus (R és S gyűrűk). Igazoljuk, hogy ekkor $A = \begin{pmatrix} R & M \\ 0 & S \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} r & m \\ 0 & s \end{pmatrix} \mid r \in R, m \in M, s \in S \right\}$ a kézenfekvő műveletekkel gyűrű, amit mint additív Abel-csoportot azonosíthatunk $R \oplus M \oplus S$-sel.

17. R balideál, S jobbideál, M pedig nilpotens kétoldali ideál A-ban. $R \oplus M$ és $M \oplus S$ kétoldali ideálok A-ban, $A/(R \oplus M) \cong S$, $A/(M \oplus S) \cong R$. $R \oplus S$ részgyűrű A-ban.

18. *a*) A balideáljai $I_1 \oplus I_2$ alakúak, ahol I_2 balideál S-ben, I_1 pedig $R \oplus M$-nek MI_2-t tartalmazó baloldali R-részmodulusa.

    b) A jobbideáljai $J_1 \oplus J_2$ alakúak, ahol J_1 jobbideál R-ben, J_2 pedig $M \oplus S$-nek J_1M-et tartalmazó jobboldali S-részmodulusa.

    c) A ideáljai $K_1 \oplus K_0 \oplus K_2$ alakúak, ahol $K_1 \lhd R$, $K_2 \lhd S$, K_0 pedig M-nek $K_1M + MK_2$-t tartalmazó (R, S)-részbimodulusa.

19. *a*) A bal- (jobb-) noether $\Leftrightarrow$ R és S bal- (jobb-) noether és M mint baloldali R-modulus (jobboldali S-modulus) noether.

    b) Ugyanez artinra noether helyett.

20. Igazoljuk, hogy $A = \begin{pmatrix} \mathbb{Q} & \mathbb{Q} \\ 0 & \mathbb{Z} \end{pmatrix}$ balnoether, de nem jobbnoether és se nem bal-, se nem jobbartin.

21. Igazoljuk, hogy $A = \begin{pmatrix} \mathbb{R} & \mathbb{R} \\ 0 & \mathbb{Q} \end{pmatrix}$ balnoether és balartin, de nem jobbnoether, és nem jobbartin.