Algebra3 matematikus szakirány

8. gyakorlat

2012. november 16.

1. A Z_{12} 12-rendű ciklikus Abel-csoportban direktösszeadandó-e az egyetlen másodrendű részcsoport?

2. (a) Igazoljuk, hogy kommutatív gyűrű feletti ciklikus modulus bármely generátorelemének ugyanaz az annullátora.

   (b)* Adjunk példát olyan nemkommutatív nullosztómentes gyűrűre, ahol ez nem feltétlenül igaz, sőt, van olyan ciklikus modulus, melyben minden elem torzió (azaz annullátora nem 0), de a modulus hűséges, azaz globális annullátora 0.

3. Igazoljuk, hogy ciklikus modulus homomorf képe is ciklikus.

4. Legyen R egy integritási tartomány. Igazoljuk, hogy egy R feletti $n \times n$-es mátrix pontosan akkor invertálható, ha determinánsa egység R-ben.

5. Legyen R egy integritási tartomány. Nevezzük a $b_1, \ldots, b_k \in R^k$ elemeket R^k egy bázisának, ha $R^k = \bigoplus_{j=1}^k Rb_j$. Igazoljuk, hogy $b_1, \ldots, b_k$ pontosan akkor bázis R^k-ban, ha az oszlopvektoraikból képzett $k \times k$-as mátrix R felett invertálható.

Innentől kezdve az R mindig egy főideálgyűrűt jelöl.

6. Igazoljuk, hogy ha M végesen generált R-modulus és $p \in R$ egy prím, akkor $M(p) \cong M/p^n M$ elég nagy n-re.

7. Legyen V egy végesdimenziós vektortér a K test felett, és $\varphi \in \mathrm{End}_K(V)$ egy lineáris transzformáció. Ekkor V egy modulus a $K[x]$ polinomgyűrű felett az $xv := \varphi(v)$ szorzással. Legyen $V \cong \bigoplus_{j=1}^k K[x]/(p_i^{\alpha_i})$ a ciklikusok direktösszegére való felbontás, ahol $p_i \in K[x]$ irreducibilis polinomok. Igazoljuk, hogy φ minimálpolinomja épp a $p_i^{\alpha_i}$ polinomok legkisebb közös többszöröse, a karakterisztikus polinomja pedig a $p_i^{\alpha_i}$ polinomok szorzata (mindkettő konstans szorzó erejéig). Adjunk tehát új bizonyítást a Cayley-Hamilton tételre.

8. Legyen $M \leq R^k$ egy tetszőlegese részmodulus R^k-ban, és $g_1, \ldots, g_n \in M$ egy tetszőleges generátorrendszer M-ben. Tekintsük azt a $k \times n$-es $A(M)$ mátrixot, melynek oszlopai a g_i elemek koordinátavektorai. Megfordítva, tetszőleges $k \times n$-es A mátrixra vehetjük azt az $M(A)$ részmodulust R^k-ban, melyet A oszlopvektorai generálnak. Legyen $B \in \mathrm{GL}_k(R)$, ill. $C \in \mathrm{GL}_n(R)$. Igazoljuk, hogy AC ugyanannak az $M \leq R^k$ modulusnak felel meg, mint A, csak más generátorokat választottunk. Másrészt BA is ugyanannak a modulusnak a mátrixa (ugyanazokkal a genrátorokkal), csak másik bázisban. Speciálisan $R^k/M(A) \cong R^k/M(BAC)$.

9. Legyen $M \leq R^k$. Igazoljuk, hogy alkalmas B és C invertálható mátrixokkal az $A(M)$ mátrix olyan normálalakra hozható, melynek főátlóján (azaz a bal felső sarokból kiinduló átlón) kívül minden elem 0. Speciálisan az R^k/M faktormodulus ciklikus modulusok direkt összegeként áll elő, ami egy új, algoritmikus (Zorn-lemmától független) bizonyítást ad a végesen generált modulusok alaptételére, hiszen minden modulus előáll szabad

modulus faktormodulusaként. Segítség: tegyük fel először, hogy R euklideszi gyűrű, és használjunk Gauß-eliminációhoz hasonló elemi átalakításokat.

10. Hogyan alkalmazható a fenti módszer mátrixok Jordan-féle normálalakjának meghatározására?

11. Igazoljuk, hogy végtelen test fölött egy lineáris transzformációnak akkor és csak akkor van véges sok invariáns altere, ha minimálpolinomja a karakterisztikus polinomjának nem 0 konstansszorosa. Hány invariáns altér van ilyenkor?