Algebra3 matematikus szakirány

7. gyakorlat

2012. november 9.

1. Igazoljuk, hogy az a leképezés, mely egy adott G csoporthoz a kommutátorrészcsoportját rendeli, egy Groups $\to$ Groups funktor, de az a leképezés, mely G-hez a $Z(G)$ centrumot rendeli, nem az.

2. Bizonyítsuk be, hogy ha T torzió $\mathbb{Z}$-modulus, D pedig osztható Abel-csoport, akkor $D \otimes_{\mathbb{Z}} T = 0$.

3. Legyen R és S egységelemes gyűrű, és $\varphi\colon R \to S$ egy (egységelemet egységelembe vivő) gyűrűhomomorfizmus, M pedig egy bal R-modulus. Ekkor S jobb (és bal) modulus lesz R fölött az $r \cdot s := \varphi(r)s$ szorzással, tehát képezhetjük a $S \otimes_{R,\varphi} M$ tenzorszorzatot, mely az $s \cdot (s' \otimes m) := (ss') \otimes m$ szorzással bal S-modulus lesz. Igazoljuk, hogy ha $I \lhd R$ ideál R-ben, és $\varphi\colon R \to S = R/I$ a természetes vetítés, akkor $(R/I) \otimes_R M \cong M/IM$ mint R/I-modulusok, ahol $IM = \{\sum_{j=1}^{n} a_i m_i \mid 0 < n \in \mathbb{Z}, s_i \in I, m_i \in M\}$.

4. Legyen R és S egységelemes gyűrű. Egy M Abel-csoportot (R, S)-bimodulusnak nevezünk, ha M-en értelmezve van R elemeivel egy balszorzás, S elemeivel pedig egy jobb szorzás, melyre nézve M bal R-modulus és egyben jobb S-modulus is lesz, sőt, a két művelet egymással felcserélhető, azaz $(rm)s = r(ms)$, ha $r \in R$, $m \in M$, $s \in S$. Igazoljuk, hogy ha M egy (R, S)-bimodulus, N pedig egy bal S-modulus, akkor $M \otimes_S N$ egy bal R-modulus.

5. Igazoljuk, hogy $R \otimes_R M \cong M$, ha M egy bal R modulus. Az izomorfizmus valójában nemkommutatív R esetén is R-modulusoknak egy izomorfizmusa, hiszen R egy (R, R) bimodulus.

6. Igazoljuk, hogy ha V és W végesdimenziós vektorterek a K test fölött, akkor $\dim_K(V \otimes_K W) = \dim_K V \dim_K W$.

7. Igazoljuk, hogy ha R egy kommutatív egységelemes gyűrű és $n \neq k$ pozitív egész számok, akkor $\underbrace{{}_R R \oplus \cdots \oplus {}_R R}_{k} \ncong \underbrace{{}_R R \oplus \cdots \oplus {}_R R}_{n}$ mint R-modulusok (v.ö. 6. feladatsor 14.* feladat).

8. Legyen R egy kommutatív gyűrű, M, N, K tetszőleges R-modulusok. Igazoljuk az alábbi izomorfizmusokat.

   (a) $M \otimes_R N \cong N \otimes_R M$.

   (b) $(M \otimes_R N) \otimes_R K \cong M \otimes_R (N \otimes_R K)$.

   (c) $(M \oplus N) \otimes_R K \cong (M \otimes_R K) \oplus (N \otimes_R K)$. Igaz marad az állítás végtelen sok tényezős direkt összegre? És direkt szorzatra?

9. Adjunk példát olyan $A \leq B$ és M Abel-csoportokra, továbbá $a \in A$ és $m \in M$ elemekre, hogy $a \otimes m = 0$, ha azt a $B \otimes M$ csoportban értelmezzük, de nem nulla, ha azt az $A \otimes M$ csoportban értelmezzük, sőt $A \otimes M$ nem is izomorf $B \otimes M$ egy részcsoportjával.

(Ha A direkt összeadandója B-nek, akkor ez nem fordulhat elő a 8(c) feladat miatt.) Speciálisan a $\cdot \otimes M$ funktor nem balegzakt, csak jobbegzakt.

10. Igazoljuk, hogy ha P projektív R-modulus, akkor a P-vel való tenzorszorzás egzakt, azaz rövid egzakt sorozatot rövid egzaktba visz. Az olyan modulusokat, melyekkel való tenzorszorzás egzakt, *lapos* modulusoknak nevezzük.

11.* Igazoljuk, hogy $\mathbb{Q}$ lapos $\mathbb{Z}$-modulus, de nem projektív.

12.* Igazoljuk, hogy egy Abel-csoport pontosan akkor lapos, ha torziómentes.

13.** Legyen R egy noether-féle integritási tartomány és M egy végesen generált R-modulus. Igazoljuk, hogy M akkor és csak akkor lapos, ha projektív.