Algebra3 matematikus szakirány

10. gyakorlat

2012. november 30.

1. Legyen R tetszőleges egységelemes gyűrű $L \lhd_b R$ minimális balideál. Igazoljuk, hogy $L^2 = 0$ vagy van olyan $e \in L$ idempotens (azaz $e^2 = e$), melyre $L = Re$.

2. Mutassuk meg, hogy ha R féligegyszerű, akkor $M_n(R)$ is féligegyszerű. Igaz-e a megfordítás?

3. Tegyük fel, hogy R nullosztómentes. Bizonyítsuk be, hogy ha $M_n(R)$ féligegyszerű, akkor R ferdetest.

4. Legyen $R = C[0,1]$ a $[0,1]$ zárt intervallumon folytonos függvények gyűrűje a pontonkénti összeadással és szorzással. Féligegyszerű-e R?

5. Igazoljuk, hogy ha az R véges gyűrű minden r eleméhez van olyan $n > 1$ egész, melyre $r^n = r$, akkor R kommutatív. A bizonyításban felhasználhatjuk azt a (még nem tanult) tényt, mely szerint minden véges ferdetest kommutatív. (Az állítás igaz végtelen R esetén is, de az jóval nehezebb.)

6. Legyen az R gyűrű k darab ferdetest feletti teljes mátrixgyűrű direkt összege. Mutassuk meg, hogy R fölött pontosan k darab egyszerű modulus van, és hogy R féligegyszerű.

7.* Legyen R egy tetszőleges egységelemes gyűrű. Igazoljuk, hogy $R/J(R)$ izomorf ferdetest feletti sűrű mátrixgyűrűk direkt szorzatának egy részgyűrűjével.