Algebra3 matematikus

2. ZH - megoldások

2010. december 10.

1. A karakterisztikus mátrix: $\begin{pmatrix} 1-x & 1 & 1 \\ -1 & 1-x & 1 \\ 0 & 1 & 2-x \end{pmatrix}$, normálalakja: $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (x-2)(x-1)^2 \end{pmatrix}$.

   Jordan-féle normálalak tehát: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

2. $(8,2)$ rendje 6, $(1,1)$ rendje 12. Továbbá $\langle(8,2)\rangle \cap \langle(1,1)\rangle = \langle(4,4)\rangle$, és $(4,4) = 2(8,2) = 4(1,1)$, tehát a leképezés magjához tartozó mátrix: $\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 12 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$. Amikor normálalakra hozunk, a sortranszformációknál a bázis nem változik. Tehát az első sorhoz hozzáadva a 3. sor -1-szeresét, és a 2. sor 1-szeresét, a csupa 0 sort elhagyva és a két sort megcserélve a $\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$ mátrixot kapjuk, közben $\mathbb{Z}^+ \oplus \mathbb{Z}^+$ bázisa nem változott. Most viszont a 2. oszlophoz adjuk az 1. kétszeresét, közben az $\{(1,0),(0,1)\}$ bázis $\{(1,-2),(0,1)\}$ bázissá változik. Tehát $\mathrm{Im}\varphi = \langle\varphi(1,-2)\rangle \oplus \langle\varphi(0,1)\rangle = \langle(6,0)\rangle \oplus \langle(1,1)\rangle \cong \mathbb{Z}_2^+ \oplus \mathbb{Z}_{12}^+$.

3. $\mathbb{Z}_{60}^+ \otimes \mathbb{Z}_{70}^+ \cong \mathbb{Z}_{(70,60)}^+ \cong \mathbb{Z}_{10}^+$, generátora $1\otimes 1$. Tehát $1\otimes 2 + 2\otimes 1 = 2(1\otimes 1 + 1\otimes 1) = 4\cdot 1\otimes 1$ rendje $10/(4,10) = 5$.

4. (1): A_2-nél egzakt. Legyen $a_2 \in A_2$, melyre $\alpha_2 a_2 = 0$. Ekkor $\alpha_3\lambda_2 a_2 = \mu_2\alpha_2 a_2 = 0$, de α_3 mono, ezért $\lambda_2 a_2 = 0$. Tehát van olyan $a_1 \in A_1$, melyre $a_2 = \lambda_1 a_1$. Viszont $\mu_1\alpha_1 a_1 = \alpha_2\lambda_1 a_1 = 0$, ahol μ_1 és α_1 mono, tehát $a_1 = 0$, így $a_2 = 0$.

   (2): B_2-nél egzakt. $\mathrm{Im}\alpha_2 \subseteq \mathrm{Ker}\beta_2$ a feltétel miatt, tehát csak a másik irányú tartalmazás kell. Legyen $b_2 \in \mathrm{Ker}\beta_2$. Ekkor $\beta_3\mu_2 b_2 = \nu_2\beta_2 b_2 = 0$, azaz $\mu_2 b_2 \in \mathrm{Ker}\beta_3 = \mathrm{Im}\alpha_3$. Azaz van olyan $a_3 \in A_3$, melyre $\alpha_3 a_3 = \mu_2 b_2$. Viszont λ_2 epi, azaz van olyan $a_2 \in A_2$, melyre $\alpha_2\mu_2 a_2 = \alpha_3\lambda_2 a_2 = \mu_2 b_2$. Tehát $b_2' := b_2 - \alpha_2 a_2$ benne van $\mathrm{Ker}\mu_2 = \mathrm{Im}\mu_1$-ben. Elég belátni, hogy $b_2' \in \mathrm{Im}\alpha_2$, mert $\alpha_2 a_2 \in \mathrm{Im} \subseteq \mathrm{Ker}\beta_2$ (vegyük észre, hogy ez utóbbit is tényleg kihasználjuk a továbbiakban). Ehhez van olyan $b_1 \in B_1$, melyre $b_2 = \mu_1 b_1$, továbbá $\beta_2 b_2 = 0$ és ν_1 injektivitása miatt $\beta_1 b_1 = 0$, azaz van olyan a_1, melyre $\alpha_1 a_1 = b_1$. Ekkor $b_2' = \alpha_2(\lambda_1 a_1)$, és készen vagyunk.

   (3): C_2-nél egzakt. Hasonlóan.

5. Legyen $0 \neq \varphi \in \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_{p^\infty}, \mathbb{Z}_{p^\infty})$. Ekkor $\mathrm{Im}\varphi$ osztható (mert osztható homomorf képe is osztható). Node $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ minden valódi részcsoportja véges, tehát nem osztható, azaz φ szürjektív. Speciálisan $n\varphi \neq 0$ semmilyen n pozitív egészre. A második kérdésre a válasz: nem. Legyen q olyan egész szám, melyre $(p,q) = 1$. Ekkor $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_{p^\infty}, \mathbb{Z}_{p^\infty})$ osztható q-val, mert a q-val való szorzás izomorfizmus $\mathbb{Z}_{p^\infty}$-n (csak azt használjuk, hogy a képen izomorfizmus). Viszont $\mathbb{Z}$ nem osztható semmilyen $q \neq \pm 1$-gyel, tehát nem lehetnek izomorfak.

2. megoldás a 2. kérdésre: Tegyük fel indirekten, hogy $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_{p^\infty}, \mathbb{Z}_{p^\infty}) \cong \mathbb{Z}^+$. Vegyünk egy g generátorát ennek a csoportnak (azaz az 1 vagy a -1 egy inverz képét az izomorfizmusnál). Ekkor g egy $\mathbb{Z}_{p^\infty} \to \mathbb{Z}_{p^\infty}$ izomorfizmus kell legyen, mert különben osztható lenne p-vel. Mivel g izomorfizmus, feltehetjük, hogy g az identikus leképezés. Most vegyük azt a $\varphi \in \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_{p^\infty}, \mathbb{Z}_{p^\infty})$ leképezést, melynek megszorítása a p^{2n}-edik egységgyökök részcsoportjára az $1 + p^2 + \cdots + p^{2n-2} = \frac{p^{2n}-1}{p^2-1}$-edik hatványra való emelés. Ez jóldefiniált, mert $1+p^2+\cdots+p^{2n-2} \equiv 1+p^2+\cdots+p^{2m-2} \pmod{p^{2n}}$ minden $n \leq m$ pozitív egész számra. Tehát φ valóban homomorfizmus. Viszont ha $\varphi = kg$ valamely $k \in \mathbb{Z}$ számra, akkor $\frac{p^{2n}-1}{p^2-1} \equiv k \pmod{p^{2n}}$ minden n egész számra. A kongruenciát p^2-1-gyel szorozva és rendezve azt kapjuk, hogy $(p^2-1)k+1$ p-nek minden hatványával osztható, tehát 0. Viszont $p^2-1>1$, ami ellentmondás, mert k egész.

Megjegyzés: $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_{p^\infty}, \mathbb{Z}_{p^\infty})$ valójában egy gyűrű, mégpedig a $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ Abel csoport endomorfizmusgyűrűje, melyet $\mathbb{Z}_{\{p\}}$-vel jelölünk (a szakirodalomban legtöbbször a $\mathbb{Z}_p$ jelölést használják, amivel mi a p elemű testet jelöltük). A második bizonyításból az is látszik, hogy $\mathbb{Z}_{\{p\}}$ minden elemét fel lehet írni egy (végtelen) $a_0 + a_1 p + \cdots + a_n p^n + \cdots$ hatványsor alakban, ahol $0 \leq a_n \leq p-1$ egész számok. Ebből persze az is következik, hogy $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_{p^\infty}, \mathbb{Z}_{p^\infty})$ nem megszámlálható (3. megoldás), és persze ebből is látszik, hogy nem lehet izomorf $\mathbb{Z}^+$-szal. Ez az úgynevezett p-adikus egészek gyűrűje. $\mathbb{Z}_{\{p\}}$-nek egyetlen maximális ideálja van (ún. *lokális* gyűrű), a p által generált ideál. Továbbá minden ideálja (p^n) alakú (tehát főideálgyűrű egyetlen prímelemmel). Ez a gyűrű (és hányadosteste, a p-adikus számok teste, melyet $\mathbb{Q}_p$-vel jelölnek) rendkívül fontos szerepet játszik az algebrai számelméletben.

6. (a) Az $x = i + j$ megoldás. (b) Az $\|a\| = \|b\|$ nyilván szükséges, mert a norma multiplikatív, és $\|x\| \neq 0$. Másrészt feltehetjük, hogy $\|x\| = 1$, ezért $x^{-1}ax = b$-t megkonjugálva és $\overline{x} = x^{-1}$-et használva azt kapjuk, hogy $x^{-1}\overline{a}x = \overline{b}$ (hiszen a konjugálás megfordítja a sorrendet). A kettőt összeadva $x^{-1}(a+\overline{a})x = b + \overline{b}$, de $a + \overline{a} = 2\mathrm{Re}(a)$ valós, speciálisan felcserélhető x-szel, ezért az is szükséges, hogy $\mathrm{Re}(a) = \mathrm{Re}(b)$. Ez elégséges is: ha $a = b$ valós, akkor az állítás nyilvánvaló, sőt mivel a valós számok minden kvaternióval felcserélhetők, ezért feltehetjük, hogy a és b tisztán képzetes. Ekkor viszont $x = a + b$ megoldás, hiszen $a(a+b) = a^2 + ab = -\|a\|^2 + ab = -\|b\|^2 + ab = ab + b^2 = (a+b)b$. Már csak akkor van baj, ha $a = -b \neq 0$, ekkor viszont minden olyan tisztán képzetes x megoldás lesz, melyhez tartozó térvektor merőleges az a-hoz tartozó térvektorra (azaz $\mathrm{Re}(ax) = 0$), mert ha a és x tisztán képzetes, akkor $\overline{ax} = \overline{x} \cdot \overline{a} = (-x)(-a) = xa$.

7. Legyen $R \leq \mathbb{Q}$ az olyan a/b alakú törtek gyűrűje, ahol $0 \neq b$ nem osztható az első 2010 darab prímszám egyikével sem ($a, b \in \mathbb{Z}$). Tehát R-ben minden olyan a/b tört egység, melyre a sem osztható az első 2010 prímmel. A prímek: $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, …, p_{100}, a számelmélet alaptétele pedig közvetlenül következik abból, hogy $\mathbb{Z}$ alaptételes.