Algebra3 matematikus

2. ZH

2010. december 10.

A maximális pontszám minden feladatra 6 pont. A ZH jegye a pontszám hatodrésze. Használni csak egy lapnyi **kézzel írott** puskát lehet, számológépet, mobiltelefont viszont nem. A rendelkezésre álló idő 100 perc. Minden beadott lapon szerepeljen a szerző neve. Mindenkinek eredményes feladatmegoldást kívánok!

1. Hozzuk Jordan-féle normálalakra az $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ mátrixot.

2. Vegyük azt a $\varphi\colon \mathbb{Z}^+ \oplus \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}_{12} \oplus \mathbb{Z}_{12}$ homomorfizmust, melyre $\varphi(1,0) = (8,2)$ és $\varphi(0,1) = (1,1)$. Írjuk fel φ képét ciklikus Abel-csoportok direkt összegeként. Adjuk meg a direktösszeadandók generátorait is, mint a kép elemeit.

3. Mennyi a $\mathbb{Z}_{60}^+ \otimes \mathbb{Z}_{70}^+$ csoportban $2 \otimes 1 + 1 \otimes 2$ rendje?

4. Tegyük fel, hogy az alábbi diagram kommutatív, és mindhárom oszlopa egzakt. Bizonyítsuk be, hogy ha $\beta_2\alpha_2 = 0$ és a két szélső sora egzakt, akkor a középső is. (Aki a három állítás közül csak kettőt lát be, az is maximális pontot kap.)

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & A_1 \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[d, "\lambda_1"'] & B_1 \arrow[r, "\beta_1"] \arrow[d, "\mu_1"'] & C_1 \arrow[r] \arrow[d, "\nu_1"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & A_2 \arrow[r, "\alpha_2"] \arrow[d, "\lambda_2"'] & B_2 \arrow[r, "\beta_2"] \arrow[d, "\mu_2"'] & C_2 \arrow[r] \arrow[d, "\nu_2"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & A_3 \arrow[r, "\alpha_3"] \arrow[d] & B_3 \arrow[r, "\beta_3"] \arrow[d] & C_3 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

5. Igazoljuk, hogy $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_{p^\infty}, \mathbb{Z}_{p^\infty})$ torziómentes. Igaz-e, hogy $\mathbb{Z}^+$-szal izomorf?

6. (a) Adjuk meg az $(1+i)x = x(1+j)$ egyenlet egy nem 0 megoldását a kvaterniók körében. (b) Mi a szükséges és elégséges feltétele annak, hogy az $ax = xb$ egyenlet megoldható az $x \neq 0$ kvaterniók körében?

7. Adjunk meg olyan alaptételes szokásos gyűrűt, melyben asszociáltság erejéig pontosan 2010 darab prímelem van.