Algebra3 matematikus

1. ZH

2010. november.

1. Itt sajátbázist kellett keresni, ami ortogonális lesz a főtengelytétel miatt. Aki nem ONB-ben diagonalizált, 5 pontot kapott. A kvadratikus alak mátrixa: $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, melyből a karakterisztikus polinom (rendezve és szorzattá alakítva) $-\lambda(3-\lambda)(3+\lambda)$. Tehát a sajátértékek $0, -3, 3$. Az $Ab_1 = 0$, $Ab_2 = -3b_2$, $Ab_3 = 3b_3$ egyenleteket megoldva és normálva $b_1 = \begin{pmatrix} 2/3 \\ -1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$, $b_2 = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 2/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}$ és $b_3 = \begin{pmatrix} -1/3 \\ 2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$ adódik. Ebből a négyzetösszegalak: $-x^2 - 4xy + 4yz + z^2 = -3(2x/3 + 2y/3 - z/3)^2 + 3(-x/3 + 2y/3 + 2z/3)^2$.

2. A kvadratikus alak mátrixa $\begin{pmatrix} c & c \\ c & 1 \end{pmatrix}$, mely pontosan akkor pozitív definit, ha mindkét főminor pozitív. Azaz $c > 0$, és $c - c^2 > 0$. Ebből $0 < c < 1$ adódik.

3. *a*) Mivel $AA^* = A^*A$, ezért A alkalmas ONB-ben diagonális. A főátló elemeiből k-adik gyököt vonva (ami elvégezhető, de persze nem egyértelmű a komplex számok körében) kapunk egy B mátrixot, ami szintén diagonális ebben az ONB-ben, ezért normális. Másrészt a konstrukció miatt $B^k = A$. *b*) A pontosan akkor önadjungált, ha sajátértékei valósak, de a valósak között nem végezhető el mindig a k-adik gyökvonás (akkor nem, ha a szám negatív és k páros), ezért B nem mindig választható önadjungáltnak. *c*) A pontosan akkor unitér, ha sajátértékei 1 abszolútértékűek, amiknek a k-adik gyöke is az. Tehát B is unitér lesz.

4. Legyen $0 \neq a \in I$. Azt akarjuk belátni, hogy a annullátora $\mathrm{Ann}(a)$ tartalmazza I-t, ami a feltétel szerint azzal ekvivalens, hogy $\mathrm{Ann}(a) \neq (0)$. Ha ez minden $a \in I$-re teljesül, akkor persze I zérógyűrű. Tegyük fel indirekten, hogy $\mathrm{Ann}(a) = 0$ valamely $0 \neq a \in I$-re. Ekkor $a^2 \neq 0$, mert $a \notin \mathrm{Ann}(a)$, tehát $(a^2) = I$ (hiszen $a^2 \in I$). Tehát $a = ra^2$ valamely $r \in R$-re (mivel $a \in I$). Tehát $a(1 - ra) = 0$, azaz $1 - ra \in \mathrm{Ann}(a)$, ezért $1 - ra = 0$. Ez viszont azt jelenti, hogy $1 \in (a) = I$, ami ellentmondás, mert $(1) = R$.

5. Az $R = \mathbb{Z}_{40}[x]/(x^2 - 3)$ gyűrű egységelemes, ezért maximális ideálja szerinti faktorgyűrű test, speciálisan nullosztómentes. Mivel R-ben $2 \cdot 3 \cdot 5 = 0$, ezért minden maximális ideálban szerepel az egyik a 2, 3 és 5 konstans polinomok maredékosztályai közül. Az M maximális ideálokat aszerint osztályozzuk, hogy melyik prímszám szerepel bennük a három közül. Ha $2 \in M$, akkor R/M-ben $(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1 = x^2 - 3 = 0$, tehát R/M nullosztómentessége miatt $x + 1 \in M$. Viszont a $(2, x+1)$ ideál szerinti faktor nem más, mint a kételemű test, azaz $M = (2, x+1)$ (valójában az $(x+1)$-ben már benne van a 2, ezért $M = (x+1)$). Hasonlóan, ha $3 \in M$, akkor R/M-ben $x^2 = 0$, azaz $x = 0$. Ez azt jelenti, hogy $x \in M$, és az előző esethez hasonlóan $M = (3, x)$. Ha pedig $5 \in M$, akkor $M = (5)$, mert (5) maximális R-ben. Ezt úgy láthatjuk be, hogy $R/(5) \cong \mathbb{Z}_5[x]/(x^2 - 3)$, és mivel az $x^2 - 3$ polinom irreducibilis $\mathbb{F}_5$ felett, ezért $R/(5)$ test (minden véges egységelemes nullosztómentes kommutatív gyűrű test, ezt 1. félévben tanultátok), azaz (5) maximális. A faktorgyűrűk elemszáma rendre 2, 3 és 25.

Megjegyzés: Ebben a feladatban az történt, hogy a $\mathbb{Z}_{30}$ gyűrűnek vettük a $\sqrt{3}$-mal való bővítését, és ebben vizsgáltuk, hogy $\mathbb{Z}_{30}$ három prímeleme hogy viselkedik. Azt láttuk, hogy a 2-es prím elágazik (jelesül a $(\sqrt{3}+1)^2$-nek asszociáltja), a 3-as prím szintén elágazik, mégpedig $\sqrt{3}$-nak a négyzete, az 5 viszont prím marad. A harmadik jelenségre (miszerint lehetne az is, hogy két különböző prím szorzatára bomlik egy prím) ebben a feladatban nem láttunk példát.

6. A baloldalt szorzattá alakítva a Gauß-egészek körében azt kapjuk, hogy $(2x+i)(2x-i) = y^5$. A bal oldalon álló két tényező relatív prím, hiszen minden közös osztójuk osztója lenne $2i$-nek, de $2i$ egyetlen prímosztója $1+i$, ami nem osztója $(2x+i)$-nek (hiszen utóbbi normája $4x^2+1$ páratlan). Tehát mindkét tényező teljes 5. hatvány egységszerese $\mathbb{G}$-ben. Viszont $\mathbb{G}$-ben minden egység 5. hatvány (mégpedig saját maga 5. hatványa), ezért $2x+i = (a+bi)^5$ valamely a és b egész számokra. A jobboldalt kifejtve és i együtthatóját összehasonlítva azt kapjuk, hogy $5a^4b - 10a^2b^3 + b^5 = 1$. Mivel itt a bal oldal osztható b-vel, ezért $b = \pm 1$, amiből az egyenletet megoldva $b = -1$ esetén nem kapunk egész megoldást, $b = 1$-ből pedig kijön az egyetlen $x = 0$, $y = 1$ megoldás.

7. I. példa: Legyen R zérógyűrű $\mathbb{Q}$ additív csoportján. Ekkor R ideáljai nem mások, mint $\mathbb{Q}$ additív részcsoportjai, és R maga sem végesen generált (pl. a 4. feladatsor 30-as feladata alapján). Viszont ha véges sok racionális számot veszünk, akkor ezeket közös nevezőre tudjuk hozni, és az általuk generált ideál R-ben nem lesz más, mint $(1/N)$, ahol N a közös nevező. Ez a gyűrű persze nem egységelemes, és nem is nullosztómentes.

   II. példa: Legyen $R = \bigoplus_{n\geq 1}\mathbb{Q} = \bigcup_{n\geq 1}\mathbb{Q}\times\cdots\times\mathbb{Q}$ (n-tényezős szorzat). Vegyük észre, hogy R minden elemének véges sok kivételtől eltekintve minden koordinátája 0. Legyen $I \subset R$ azon elemek halmaza, melyben minden páratlanadik koordináta 0. Ez nyilván ideál R-ben. Viszont nem lehet főideá, mert ha pl. egy $Ra = (a) = I$ lenne, akkor persze a elég nagy páros sorszámú koordinátája 0 (és így a minden többszörösének is), de I-ben van olyan elem, aminek ez a páros sorszámadik koordinátája nem 0, ami ellentmondás. Viszont ha $r_1, r_2, \ldots, r_k$ véges sok elem R-ből, akkor persze összesen is csak véges sok nem 0 koordináta szerepel az r_i-kben. Vegyük azokat a koordinátákat, mely helyeken szerepel 0-tól különböző szám valamely r_i-ben, és vegyük azt az elemét R-nek, ami ezeken a helyeken 1, a többin pedig 0. Ez az elem generálja az $(r_1, r_2, \ldots, r_k)$ ideált. Itt $\mathbb{Q}$ helyett vehetünk akármilyen testet, sőt akármilyen főideálgyűrűt (utóbbi házi feladat, alkalmazzuk a 4. feladatsor 9. feladatát). Ez a gyűrű már egységelemes, de nem nullosztómentes.

   Megjegyzés: Az ilyen R gyűrűket, melyekben minden végesen generált ideál főideál, az irodalomban Bezout-gyűrűknek nevezik, és kiterjedt elméletük van (sokminden igaz felettük is, ami igaz főideálgyűrűk felett). Csillagos (beadható) házifeladat, hogy konstruáljunk egységelemes, nullosztómentes Bezout-gyűrűt (lehetőség szerint a google használata nélkül).