

# Algebra3 matematikus

1. ZH

2010. október 22.

A maximális pontszám minden feladatra 6 pont. A ZH jegye a pontszám hatodrésze. Használni csak egy lapnyi **kézzel írott** puskát lehet, számológépet, mobiltelefont viszont nem. A rendelkezésre álló idő 120 perc. Minden beadott lapon szerepeljen a szerző neve. Mindenkinek eredményes feladatmegoldást kívánok!

1. Transzformáljuk négyzetösszegé *ortonormált* bázisban a  $-x^2 - 4xy + 4yz + z^2$  kvadratikus alakot.
2. A valós  $c$  paraméter mely értékeire lesz a  $cx^2 + 2cxy + y^2$  kvadratikus alak pozitív definit?
3. Legyen  $A$  egy normális transzformáció egy (véges dimenziós) komplex euklideszi téren,  $k$  pedig egy pozitív egész szám.
  - a) Bizonyítsuk be, hogy van olyan  $B$  normális transzformáció, melyre  $B^k = A$ .
  - b) Igaz-e, hogy ha  $A$  önadjungált, akkor  $B$  is választható annak?
  - c) Igaz-e, hogy ha  $A$  unitér, akkor  $B$  is választható annak?
4. Legyen  $R$  egy kommutatív, egységelemes gyűrű, melynek  $I$  az egyetlen  $0$ -tól és  $R$ -től különböző ideálja. Mutassuk meg, hogy  $I$  zérógyűrű.
5. Melyek a maximális ideálok a  $\mathbb{Z}_{30}[x]/(x^2 - 3)$  gyűrűben? Hány eleműek a faktorgyűrűk?
6. Oldjuk meg az egész számok körében az  $4x^2 + 1 = y^5$  egyenletet.
7. Adjunk példát olyan  $R$  gyűrűre, melyben minden végesen generált ideál főideál, de a gyűrű nem Noether.