Bsc algebra3 matematikus gyakorlat

Kilencedik feladatsor (2010. nov. 18.)

1. ***(7.6.8)*** Adjuk meg az alábbi mátrixok minimálpolinomját és Jordan-alakját.

$$\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}\qquad\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}\qquad\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}\qquad\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\qquad\begin{bmatrix}1&1&-2\\1&1&-2\\1&1&-2\end{bmatrix}$$

2. ***(7.6.9)*** Számítsuk ki az alábbi mátrixokhoz tartozó karakterisztikus mátrix normálalakját, minimálpolinomjukat és Jordan-alakjukat.

$$\begin{bmatrix}2&1\\-1&0\end{bmatrix}\qquad\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}\qquad\begin{bmatrix}-3&-4&1\\6&9&-2\\15&24&-5\end{bmatrix}\qquad\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{bmatrix}$$

3. ***(7.6.10)*** Az alábbiakban megadjuk egy-egy komplex elemű (ismeretlen) L mátrix esetében az $L - xE$ normálalakjában a főátlóban szereplő polinomokat. Adjuk meg e mátrix minimálpolinomját és a Jordan-féle normálalakját.

(1) $\{1, x^2\}$.
(2) $\{x, x, x\}$.
(3) $\{1, 1, x^3\}$.
(4) $\{1, 1, 1, 1, 1, 1, x, x(x-1)^2, x^3(x-1)^2\}$.

4. ***(7.6.11)*** Számítsuk ki egy Jordan-blokk karakterisztikus mátrixának normálalakját.

5. ***(7.6.12)*** Igazoljuk, hogy végtelen test fölött egy lineáris transzformációnak akkor és csak akkor van véges sok invariáns altere, ha minimálpolinomjának foka megegyezik a tér dimenziójával. Hány invariáns altér van ilyenkor?

---

6. ***(7.7.5)*** Igazoljuk, hogy ha m és n relatív prím pozitív egészek, akkor $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_m^+, \mathbb{Z}_n^+) = 0$.

7. ***(7.7.3)*** Legyen R gyűrű és $r \in R$. Értelmezzük a $\psi_r : R \to R$ leképezést a $\psi_r(x) = xr$ képlettel (ez az r-rel való jobbszorzás). Mutassuk meg, hogy $\psi_r \in \mathrm{Hom}_R({}_RR, {}_RR)$. Speciálisan $\psi_1 = id_R$. Igazoljuk, hogy ha minden $r \in R$ esetén $r\, id_R$ (ami az r-rel való balszorzás) is R-homomorfizmus, akkor R kommutatív.

8. ***(7.7.7)*** Mutassuk meg, hogy $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_n^+, \mathbb{Z}_n^+) \cong \mathbb{Z}_n^+$.

9. ***(7.7.9)*** Igazoljuk, hogy $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_m^+, \mathbb{Z}_n^+) \cong \mathbb{Z}_{(m,n)}^+$ (ahol (m, n) legnagyobb közös osztó).

10. ***(7.7.10)*** Bizonyítsuk be, hogy ha R egységelemes gyűrű és M bal oldali R-modulus, akkor $\mathrm{Hom}_R({}_RR, M) \cong M$ (kommutatív R esetén mint R-modulusok, általános R esetén mint Abel-csoportok lesznek izomorfak).

11. ***(7.7.11)*** Legyenek M, N, K tetszőleges bal oldali R-modulusok. Igazoljuk, hogy

$$\mathrm{Hom}_R(M \times N, K) \cong \mathrm{Hom}_R(M, K) \times \mathrm{Hom}_R(N, K)\,, \quad \text{és}$$
$$\mathrm{Hom}_R(K, M \times N) \cong \mathrm{Hom}_R(K, M) \times \mathrm{Hom}_R(K, N)\,,$$

(ez mindig csoportizomorfizmus, és R-izomorfizmus, ha R kommutatív). Általánosítsunk véges sok tényezős direkt szorzatra. Igaz marad-e az állítás végtelen sok tényezős direkt szorzatra, illetve direkt összegre?