Bsc algebra3 matematikus gyakorlat

Nyolcadik feladatsor (2010. nov. 11.)

Egy főideálgyűrű fölötti L mátrix i-edik *determinánsosztójának* nevezzük, és $\Delta_i(L)$-lel jelöljük az L összes $i \times i$ méretű aldeterminánsainak kitüntetett közös osztóját (és $\Delta_0(L) = 1$). Az L mátrix i-edik *elemi osztója* $\Delta_i(L)/\Delta_{i-1}(L)$, illetve nulla, ha $\Delta_{i-1}(L) = 0$.

1. ***(7.3.9)*** Legyen R főideálgyűrű. Igazoljuk az alábbi állításokat.

(1) Egy R-modulus akkor és csak akkor ciklikus, ha az ${}_RR$ egy faktormodulusával izomorf. Egy ciklikus modulusban bármelyik generátorelemnek (asszociáltság erejéig) ugyanaz a rendje. Két ciklikus modulus akkor izomorf, ha generátorelemük rendje asszociált.

(2) Az R bármelyik r eleméhez van olyan ciklikus modulus, ahol a generátorelem rendje r. Ilyen modulus például ${}_RR/(r)$, ahol (r) jelöli az $r \in R$ elem által generált főideált.

(3) Ciklikus modulus minden homomorf képe ciklikus.

(4) Ciklikus modulus minden részmodulusa is ciklikus, és a részmodulusok kölcsönösen egyértelmű megfeleltetésben állnak a modulust generáló elem rendjének osztóival.

(5) Ciklikus modulus exponense ugyanaz, mint a (generátorelem) rendje.

2. ***(7.4.11)*** Az alábbi M modulusok megadott $X = \{d_1, \ldots, d_k\}$ generátorrendszeréhez készítsük el az alaptétel bizonyításában használt mátrixot, hozzuk ezt normálalakra, és ennek alapján bontsuk föl M-et ciklikus modulusok direkt összegére.

(1) $M = \mathbb{Z}_6^+$ a $\mathbb{Z}$ fölött, $X = \{2, 3\}$.

(2) $M = \mathbb{Z}_2^+ \times \mathbb{Z}_2^+ \times \mathbb{Z}_3^+$ a $\mathbb{Z}$ fölött, $X = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$.

(3) $M = \mathbb{Z}_{16}^\times$ a $\mathbb{Z}$ fölött, $X = \{3, 5\}$.

3. ***(7.4.12)*** Az alább felsorolt L mátrixok mindegyikéből készítsük el az $L - xE$ mátrixot. Számítsuk ki a kapott mátrixoknak a normálalakját.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

4. ***(7.4.10)*** Hogyan olvasható le a normálalakú mátrixból, hogy a modulus ciklikus-e?

5. ***(7.4.13)*** Hogyan olvashatók le a determinánsosztók és az elemi osztók egy mátrix normálalakjából? Mutassuk meg, hogy az elemi átalakítások során a determinánsosztók (asszociáltság erejéig) nem változnak, és ezért a normálalak egyértelmű.

6. ***(7.4.14)*** Mutassuk meg, hogy ha R szokásos gyűrű, és $L \in R^{k \times k}$ egy $k \times k$-as mátrix, akkor L-nek pontosan akkor van inverze az $R^{k \times k}$-ban, ha determinánsa R-nek egysége.

7. ***(7.4.15)*** Legyen R szokásos gyűrű, M egy R-modulus, és $b_1, \ldots, b_k$ generátorrendszer M-ben. Legyen $L = ((r_{ij})) \in R^{k \times k}$, melynek determinánsa R-nek egysége. Mutassuk meg, hogy akkor a k darab $c_i = r_{i1}b_1 + \ldots + r_{ik}b_k \quad (i = 1, \ldots, k)$ elem szintén generátorrendszert alkot M-ben, és ha $b_1, \ldots, b_k$ bázis volt, akkor az új elemek is bázist alkotnak.

8. ***(7.4.16)*** Tegyük föl, hogy R szokásos gyűrű, $su + tv = 1$, ahol $s, t, u, v \in R$, és M egy R-modulus. Adott $b_1, b_2 \in M$ elemekre legyen $c_1 = sb_1 + tb_2$ és $c_2 = -vb_1 + ub_2$.

(1) Fejezzük ki c_1 és c_2 segítségével a b_1 és b_2 elemeket.

(2) Igazoljuk, hogy egy független rendszer független marad, ha a benne szereplő b_1, b_2 elemeket c_1, c_2-re cseréljük.

9. ***(7.4.17)*** Tegyük föl, hogy R főideálgyűrű, $b_1, \ldots, b_k$ bázis ${}_R R^k$-ban, és g_i generátorrendszere a $K \leq R^k$ részmodulusnak. Legyen $g_i = r_{i1}b_1 + \ldots + r_{ik}b_k$, és készítsük el az $r_{ij} \in R$ elemekből a szokásos mátrixot. Igazoljuk az alaptételt az alábbi lépesek segítségével.

(1) Tegyük föl, hogy a mátrix r_{11} és r_{12} elemeinek kitüntetett közös osztója d. Írjuk föl a d elemet $r_{11}u + r_{12}v$ alakban, ahol $u, v \in R$. Hajtsuk végre az előző feladatban leírt helyettesítést az $s = r_{11}/d$, $t = r_{12}/d$, u, v elemeket használva. Mutassuk meg, hogy a kapott új bázishoz tartozó mátrix bal felső sarkába d, mellé 0 került.

(2) Tegyük föl, hogy a mátrix r_{11} és r_{21} elemeinek kitüntetett közös osztója d. Változtassuk meg a g_1 és g_2 elemeket az előző pontban látotthoz hasonló eljárással úgy, hogy újra K generátorrendszerét kapjuk, és az új generátorrendszerhez tartozó mátrix bal felső sarkába d, alá 0 kerüljön.

10. ***(7.5.5)*** Legyen $M = M(A, V)$ (ahol V vektortér egy T test fölött és $A \in \mathrm{Hom}(V)$). Tekintsük a $p(x) = x - \lambda$ polinomot, ahol $\lambda \in T$.

(1) Hogyan hívtuk az $M[p]$ alteret lineáris algebrában?

(2) Mutassuk meg, hogy az M modulus p-komponensének az elemei pontosan a λ-hoz tartozó úgynevezett *általánosított sajátvektorok*, vagyis azok a $v \in M$ elemek, melyekre $(A - \lambda E)^m(v) = 0$ alkalmas m egészre.

11. ***(7.5.6)*** Tegyük föl, hogy M az R főideálgyűrű fölötti modulus, és $p \in R$ egy prím. Legyen $N = M/M[p]$, és tekintsük az $N[p]$ részmodulus teljes inverz képét az M modulusban (a természetes homomorfizmusnál). Mutassuk meg, hogy ez pontosan az $M[p^2]$ részmodulus.

12. ***(7.5.7)*** Tegyük föl, hogy $b_1, \ldots, b_k$ bázis az R főideálgyűrű fölötti M modulusban, és $p \in R$ egy prím. Legyen $N = M/pM$, mint $R/(p)$ fölötti vektortér. Mutassuk meg, hogy ennek a vektortérnek a dimenziója k. Megmutathattuk volna ennek felhasználásával is, hogy egy szabad modulusban a bázis elemszáma egyértelmű?

---

13. ***(5.7.3)*** Legyen R kommutatív gyűrű, és F az R egy olyan részhalmaza, amely a szorzásra zárt, de $0 \notin F$ és F nullosztót sem tartalmaz. Mutassuk meg, hogy van olyan S kommutatív, egységelemes gyűrű, amelynek R részgyűrűje, S minden eleme előáll egy R-beli és egy F-beli elem hányadosaként, és F minden eleme S-ben már invertálható.

14. ***(5.7.8)*** Legyen R szokásos gyűrű, P prímideálja R-nek, és F a P-n kívüli elemek halmaza. Készítsük el az előző gyakorlatban leírt $S \geq R$ gyűrűt. Mutassuk meg, hogy S egyetlen maximális ideálja az olyan a/b törtekből áll, melyekre $a \in P$ (és $b \in F$).

15. ***(5.7.7)*** Mutassuk meg, hogy ha az R kommutatív, nullosztómentes gyűrű és I nem nulla ideál R-ben, akkor R és I hányadosteste izomorf.

16. ***(5.7.10)*** Legyen R (szokásos) főideálgyűrű és T a hányadosteste. Igazoljuk, hogy minden $R \leq S \leq T$ részgyűrű főideálgyűrű.

17. ***(5.7.11)*** Legyen R szokásos gyűrű és T a hányadosteste. Bizonyítsuk be, hogy ha minden $R \leq S \leq T$ részgyűrű alaptételes, akkor R főideálgyűrű.

18. ***(5.9.10)*** Hány elrendezése van az $\left\{a + b\sqrt{2} \,:\, a, b \in \mathbb{Q}\right\}$ gyűrűnek?

19. ***(5.9.11)*** Igazoljuk, hogy a $\mathbb{Q}[x]$ polinomgyűrű elrendezését kapjuk a $P = \{f \,:\, f(\pi) > 0\}$ pozitivitástartományból. Ugyanez a konstrukció elrendezi az $\mathbb{R}[x]$ gyűrűt is?

20. ***(5.9.12)*** Mutassuk meg, hogy $\mathbb{R}[x]$-nek végtelen sok elrendezése van.