Bsc algebra3 matematikus gyakorlat

Hetedik feladatsor (2010. nov. 4.)

1. ***(7.1.5)*** Igazoljuk, hogy az X által generált $\langle X\rangle$ részmodulus az összes $r_1x_1+\ldots+r_kx_k$ lineáris kombinációkból áll, ahol $r_i\in R$, $x_i\in X$, és $k\geq 0$ egész.

2. ***(7.1.8)*** Fogalmazzuk meg, és lássuk be a homomorfizmustételt, valamint a két izomorfizmustételt modulusokra. Adjuk meg a kapcsolatot a faktormodulus részmodulusai, és az eredeti modulusnak a magot tartalmazó részmodulusai között.

3. ***(7.1.9–11)*** Mutassuk meg, hogy az alábbi struktúrák mind unitér modulusok, kivéve az elsőt, amely modulus ugyan, de nem unitér.

(1) Egy tetszőleges Abel-csoport egy tetszőleges gyűrű fölött, ahol a modulusszorzást azonosan nullának értelmezzük.
(2) T^n a $T^{n\times n}$ fölött a mátrix-vektor szorzásra (T test). Egyszerű ez a modulus?
(3) Legyen V vektortér egy T test fölött, és A egy *rögzített* lineáris transzformáció V-n. Az $M=M(A,V)$ alaphalmaza V, összeadása V összeadása, és $f\in T[x]$, $v\in V$ esetén $fv=\big(f(A)\big)(v)$. Ugyanígy beszélünk $M(A,V)$-ről $T[x]$ fölött akkor is, ha $A\in T^{n\times n}$ egy rögzített $n\times n$-es mátrix és $V=T^n$. Igazoljuk, hogy a részmodulusok pontosan az A-invariáns alterek.
(4) Egy olyan A Abel-csoport $\mathbb{Z}_m$ fölött, amelynek exponense m-nek osztója. Az na jelentése a szokásos csoportbeli többszörös.
(5) Ha S részgyűrűje az R gyűrűnek, akkor R az S fölött, ahol az összeadás az R-beli összeadás, továbbá ha $s\in S$ és $r\in R$, akkor az sr modulus-szorzat ugyanaz, mint az sr szorzat az R gyűrűben.
(6) Ha J balideálja R-nek, akkor J az R fölött, ahol az összeadás a J-beli összeadás, továbbá ha $r\in R$ és $a\in J$, akkor az ra modulus-szorzat ugyanaz, mint az ra szorzat az R gyűrűben. Ezt a modulust ${}_RJ$-vel szokás jelölni.

4. ***(7.1.12)*** Tegyük $\mathbb{R}$ additív csoportját modulussá $\mathbb{R}[x]$ fölött kétféleképpen. Az első modulus szorzása $fr=f(1)r$, a másodiké $fr=f(2)r$. Izomorfak-e a kapott modulusok?

5. ***(7.1.14)*** Legyenek $N\leq M$ és K bal R-modulusok, továbbá $\varphi_0: M\to K$ egy R-homomorfizmus. Definiáljuk a $\varphi: M/N\to K$ megfeleltetést a $\varphi(m+N)=\varphi_0(m)$ képlettel, ahol $m\in M$. Igazoljuk, hogy $N\subseteq \operatorname{Ker}(\varphi_0)$ esetén φ jóldefiniált és modulushomomorfizmus.

6. ***(7.2.17)*** Bázist alkot-e a $\mathbb{Z}^+\times\mathbb{Z}^+$ csoportban $\{(1,0),(1,1)\}$? Adjunk meg ebben a csoportban végtelen sok különböző bázist.

7. ***(7.2.20*)*** Mutassuk meg, hogy egy ferdetest fölötti végesen generált modulusnak mindig van bázisa, és a bázis elemszáma egyértelműen meghatározott.

8. ***(7.2.8)*** Mutassuk meg, hogy egy M modulusban az m_i $(i\in I)$ elemek akkor és csak akkor alkotnak gyenge bázist, ha $M=\bigoplus_{i\in I}\langle m_i\rangle$.

9. ***(7.2.6)*** Mutassuk meg, hogy a $\mathbb{Z}_6^+$ csoportban mint $\mathbb{Z}$-modulusban, az $\{1\}$ halmaz is, és a $\{3,4\}$ halmaz is egy-egy gyenge bázis. Van-e ennek a modulusnak bázisa?

10. ***(7.2.7)*** Betehető-e a 6 elem a $\mathbb{Z}_{12}^+$ egy gyenge bázisába?

11. ***(7.2.16)*** Gyenge bázis-e a $\mathbb{Z}_2^+\times\mathbb{Z}_4^+$ csoportban $\{(1,2),(1,1)\}$?

12. ***(7.3.3)*** Ha R főideálgyűrű, M egy R-modulus, $r \in R$ és $m \in M$, akkor igazoljuk, hogy

$$o(rm) \sim \frac{o(m)}{(o(m), r)} \qquad \text{(a „hatvány” rendjének képlete).}$$

Itt $(o(m), r)$ legnagyobb közös osztót, a $\sim$ pedig asszociáltságot jelöl.

13. ***(7.3.9)*** Mutassuk meg a következő állításokat, amelyek egy R főideálgyűrű fölötti modulusokról szólnak.

(2) R-modulusok direkt szorzatának és direkt összegének exponense egyaránt a tényezők exponenseinek legkisebb közös többszöröse.

(4) Ha egy M modulus m elemének rendje $u = u_1 \dots u_k$, ahol $u_1, \dots, u_k$ páronként relatív prímek, akkor $\langle m \rangle = \langle v_1 m \rangle \oplus \dots \oplus \langle v_k m \rangle$, ahol $v_i = u/u_i$ és $o(v_i m) = u_i$.

(5) Ha $r, s \in R$, akkor az r rendű és az s rendű ciklikus modulus direkt szorzata pontosan akkor ciklikus, ha r és s relatív prímek.

14. ***(7.3.22)*** Legyen R (egységelemes) gyűrű. Lássuk be az alábbiakat.

(1) Egy R-modulus pontosan akkor ciklikus, ha ${}_R R$ egy faktorával izomorf.

(2) Ha J részmodulusa ${}_R R$-nek (azaz balideálja R-nek), akkor az R/J modulus $1 + J$ generátorának a rendje J (tehát a ciklikus modulusok generátorainak a lehetséges rendjei pontosan az R balideáljai).

(3) Ciklikus modulus minden homomorf képe ciklikus.

15. ***(7.3.10)*** Igazoljuk, hogy főideálgyűrű fölött a torzió-részmodulus tényleg részmodulus, és a szerinte vett faktor torziómentes. Adjunk példát olyan kommutatív gyűrűre, amely fölött a torzióelemek nem mindig alkotnak részmodulust.

16. ***(7.3.14)*** Melyik csoporttal izomorf $\mathbb{Z}_n^+[m]$, illetve $\mathbb{Z}_n^+ / m\,\mathbb{Z}_n^+$? (Itt $\mathbb{Z}_n^+[m]$ a $\mathbb{Z}_n^+$ modulus m-talpa, vagyis azon elemek halmaza, melyeknek m-szerese nulla.)

17. ***(7.3.20)*** Legyen R főideálgyűrű, $p \in R$ prím, és M egy R-modulus. Mutassuk meg, hogy ha $b \in M$, akkor $b + M[p]$ rendje az $M/M[p]$ faktormodulusban $o(b)/p$, ha $o(b)$ osztható p-vel, és $o(b)$ egyébként.

18. ***(7.2.21, 7.3.22)*** Legyen V a sík, mint $\mathbb{R}$ fölötti vektortér, A az $y = x$ egyenesre való tükrözés, és $M = M(A, V)$ (azaz a sík, mint $\mathbb{R}[x]$-modulus). Bontsuk föl ezt a modulust két nemtriviális részmodulusának direkt összegére. Számítsuk ki az $M(A, V)$ modulus elemeinek rendjeit, és a modulus exponensét is. Ciklikus ez a modulus? A sík mely A transzformációira kapunk ciklikus modulust? Választhatunk-e A helyett egy olyan lineáris transzformációt a síkon, amely esetében ilyen direkt felbontás nem lehetséges?

19. ***(7.3.18)*** Legyen $V = \mathbb{R}^3$ az $\mathbb{R}$ fölött,

$$u = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \text{és} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Igazoljuk, hogy $\langle u \rangle = M(A, V)$, határozzuk meg u rendjét, és a részmodulusok számát.

20. ***(7.3.19)*** Igazoljuk, hogy ha V véges dimenziós, akkor $M(A, V)$ elemeinek nem nulla a rendje, és $M(A, V)$ exponense az A minimálpolinomja.

21. ***(7.3.22)*** Legyen T test és $R = T^{n \times n}$ (a teljes mátrixgyűrű). Bontsuk föl az ${}_R R$ modulust n darab egyszerű részmodulusának direkt összegére. Izomorfak ezek a részmodulusok?