Bsc algebra3 matematikus gyakorlat

Hatodik feladatsor (2010. okt. 21.)

1. ***(5.8.11)*** Legyen T test és $\varphi : T \to T$ nem azonosan nulla homomorfizmus. Mutassuk meg, hogy φ fixen hagyja T prímtestének az elemeit.

2. ***(5.8.12)*** Legyen T test.

(1) Mutassuk meg, hogy ha T karakterisztikája nem kettő, akkor fölírható benne a másodfokú egyenlet megoldóképlete.

(2) Adjunk példát olyan 2 karakterisztikájú testre, és olyan másodfokú polinomra, melyre nem alkalmazható a megoldóképlet.

(3) Igaz-e, hogy ha T minden eleméből vonható T-ben négyzetgyök, akkor nincs T fölött másodfokú irreducibilis polinom?

3. ***(5.8.14)*** Tegyük föl, hogy a T test p karakterisztikája nem osztja az $n > 0$ egészet ($p = 0$ is megengedett). Mutassuk meg, hogy egy $\varepsilon \in T$ elem akkor és csak akkor gyöke a $\Phi_n(x) \in T[x]$ körosztási polinomnak, ha ε rendje n a T multiplikatív csoportjában.

4. ***(5.8.16)*** Mely $p \mid n$ prímekre és c egészekre igaz, hogy $p^2 \mid \Phi_n(c)$?

5. ***(5.8.17)*** Legyenek $m \neq n$ pozitív egészek. Mikor létezik olyan c egész szám, melyre a $\Phi_m(c)$ és a $\Phi_n(c)$ *számok* nem relatív prímek? Mennyi lehet ekkor e két szám legnagyobb közös osztója?

6. ***(5.10.17)*** Legyen D ferdetest. Mutassuk meg, hogy a $D^{n\times n}$ teljes mátrixgyűrű centruma a dE skalármátrixokból áll, ahol $d \in Z(D)$ a D centruma, és E az egységmátrix.

7. ***(5.8.17)*** Legyen $z = p + qi + rj + sk = \alpha + \beta j$, ahol $\alpha = p + qj$ és $\beta = r + sj$. Mutassuk meg, hogy a

$$\varphi(z) = \varphi(p + qi + rj + sk) = \begin{bmatrix} p + qi & r + si \\ -r + si & p - qi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{bmatrix}$$

leképezés injektív gyűrűhomomorfizmus a $\mathbb{K}$-ból a $\mathbb{C}^{2\times 2}$ gyűrűbe, és így a kvaterniók gyűrűt alkotnak a megadott műveletekre.

8. ***(5.11.11)*** Mutassuk meg, hogy a Frobenius-tétel mindegyik feltétele szükséges, vagyis adjunk példát olyan algebrára, amely nem a tételben felsoroltak valamelyike, de

(1) $\mathbb{R}$ fölötti, nullosztómentes (csak nem véges dimenziós);

(2) $\mathbb{R}$ fölötti, véges dimenziós (csak nem nullosztómentes).

9. ***(5.11.12)*** Határozzuk meg az $i + j$ és $i + j + k$ kvaterniók négyzetét, inverzét és minimálpolinomját.

10. ***(5.11.13)*** Igazoljuk, hogy a $p_1 + q_1 i + r_1 j + s_1 k$ és a $p_2 + q_2 i + r_2 j + s_2 k$ nem valós kvaterniók pontosan akkor generálják $\mathbb{K}$-nak ugyanazt a ($\mathbb{C}$-vel izomorf) részalgebráját, ha a (q_1, r_1, s_1) és a (q_2, r_2, s_2) vektorok párhuzamosak.

11. ***(5.11.5)*** Mik az $x^2 - 1$, illetve az $x^2 + 1$ polinomok gyökei $\mathbb{K}$-ban?

12. ***(5.11.14)*** Igazoljuk, hogy minden nem valós kvaterniónak pontosan két négyzetgyöke van $\mathbb{K}$-ban.

13. ***(5.11.15)*** Oldjuk meg $\mathbb{K}$-ban az $x^n = 1$ egyenletet.

14. Mely kvaterniók gyökei egy normált, egész együtthatós polinomnak?