Bsc algebra3 matematikus gyakorlat

Ötödik feladatsor (2010. okt. 14.)

1. ***(5.6.12)*** Bizonyítsuk be, hogy ha R (kommutatív) gyűrű és $R[x]$ Noether-gyűrű, akkor R is Noether-gyűrű.

2. ***(5.5.11)*** Főideál-e $\mathbb{Z}[x]$-ben $(x+1, x+2)$, illetve $(2x+2, x+4)$?

3. ***(5.5.12)*** Igazoljuk, hogy az R szokásos gyűrű $p \neq 0$ eleme akkor és csak akkor prím, ha $R/(p)$ nullosztómentes, nem egyelemű gyűrű. Adjunk példát olyan p prímre, amikor ez a faktor nem test.

4. ***(5.5.13)*** Legyen R szokásos gyűrű és $b, c \in R$. Bizonyítsuk be, hogy $(b)(c) = (bc)$ és $(b) + (c) = (b, c)$ (itt a (b) és (c) komplexusszorzatáról és komplexusösszegéről van szó). Igazoljuk azt is, hogy ha a b és c elemeknek létezik t kitüntetett közös többszöröse (például ha R alaptételes), akkor $(b) \cap (c) = (t)$.

5. ***(5.5.14)*** Tegyük föl, hogy I, J és K ideálok egy R gyűrűben. Mutassuk meg, hogy $I(J, K) = (IJ, IK)$, és $(I, J)(I \cap J) \subseteq IJ + JI$. (Az egymás mellé írás komplexusszorzást jelöl, (I, J) pedig az $I \cup J$ által generált ideál.) Ha R főideálgyűrű, akkor milyen számelméleti állításokat jelentenek ezek az összefüggések?

6. ***(5.5.15)*** Adjunk példát olyan szokásos gyűrűre, amelyben a főideálokra érvényes a maximumfeltétel, de tetszőleges ideálokra nem.

7. ***(5.5.16)*** Van-e $\mathbb{Z}[x]$-ben olyan ideál, amely nem generálható 1000 elemmel?

---

8. Legyen $\mathbb{G}$ a Gauss-egészek gyűrűje és $N(a + bi) = a^2 + b^2$.

a) Igazoljuk, hogy a norma multiplikatív és erre a normára nézve $\mathbb{G}$ euklideszi.

b) Mutassuk meg, hogy $\alpha \in \mathbb{G}$ pontosan akkor egység, ha a normája 1, és soroljuk fel az összes egységet.

c) Határozzuk meg a $2+11i$ és $13+4i$ kitüntetett közös osztóját az euklideszi algoritmussal.

d) Bontsuk Gauss-prímek szorzatára a 30 és a $90 - 1230i$ számokat.

e) Mely $p > 0$ prímek esetén oldható meg az $x^2 + 1 \equiv 0$ (p) kongruencia?

f) Határozzuk meg az összes prímet $\mathbb{G}$-ben.

g) Legyen $n = 2^\alpha p_1^{\beta_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{\beta_k} q_1^{\gamma_1} \cdot \ldots \cdot q_\ell^{\gamma_\ell}$, ahol $p_i \equiv 1$ (4) és $q_j \equiv -1$ (4) pozitív prímek. Bizonyítsuk be, hogy az n számot akkor és csak akkor lehet felírni két négyzetszám összegeként, ha mindegyik γ_j páros, és a megoldások száma $4(\beta_1 + 1) \cdot \ldots \cdot (\beta_k + 1)$.

h) Oldjuk meg az $x^2 + 1 = y^3$ diofantikus egyenletet az egész számok között.

9. Igazoljuk a kvadratikus reciprocitási tétel felhasználása nélkül az $x^2 - x + 1 \equiv 0$ (p) kongruencia megoldhatóságát jellemző tételt (p pozitív prím).

10. Igazoljuk, hogy ha α Euler-egész és π Euler-prím, akkor $\pi \mid \alpha^{N(\pi)} - \alpha$.

11. Mely n-ekre oldható meg az $x^2 + 3y^2 = n$ diofantikus egyenlet és hány megoldása van?

12. Oldjuk meg az $x^2 + 243 = y^3$ diofantikus egyenletet.

13. Igazoljuk, hogy $\mathbb{Z}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} \,:\, a, b \in \mathbb{Z}\}$ euklideszi gyűrű és határozzuk meg a prímeket.

14. Legyen d négyzetmentes egész és $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ az $a + b\sqrt{d}$ alakú számok teste, ahol $a, b \in \mathbb{Q}$. Mely elemei lesznek gyökei egy egész együtthatós, normált polinomnak?