**Bsc algebra3 matematikus gyakorlat**

*Negyedik feladatsor (2010. okt. 7.)*

**1.** ***(5.1.13)*** Mutassuk meg, hogy ha $R$ gyűrű, és $I, J$ ideálok $R$-ben, akkor az $I + J$ komplexusösszeg és az $IJ$ komplexusszorzat is ideál. Bizonyítsuk be, hogy a komplexusszorzás asszociatív, és a komplexusösszeadásra nézve disztributív.

**2.** ***(5.1.14)*** Legyen $R$ kommutatív, egységelemes gyűrű. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges $s_1, \ldots, s_n, t_1, \ldots, t_m \in R$ esetén $(s_1, \ldots, s_n)(t_1, \ldots, t_m)$ az $nm$ darab $s_i t_j$ elem által generált ideál, ahol $1 \leq i \leq n$ és $1 \leq j \leq m$.

**3.** ***(5.1.15)*** Legyen $R$ tetszőleges gyűrű. Bizonyítsuk be, hogy az $X = \{s_1, \ldots, s_n\}$ által generált balideál elemei az $m_1 s_1 + \ldots + m_n s_n + r_1 s_1 + \ldots + r_n s_n$ alakú kifejezések, ahol $m_i \in \mathbb{Z}$ és $r_i \in R$. Hogyan változik ez a képlet végtelen $X$ esetén?

**4.** ***(5.1.16)*** Legyen $R$ egységelemes gyűrű és $X \subseteq R$. Bizonyítsuk be, hogy az $X$ által generált (kétoldali) ideál elemei az $rxs$ alakú elemekből képzett véges összegek, ahol $r, s \in R$ és $x \in X$ (ugyanazon $x$-hez az összegben több ilyen tag is szerepelhet). Hogyan változik ez a képlet, ha $R$-ről nem tesszük föl, hogy egységelemes?

**5.** ***(5.1.20)*** Adjunk példát olyan $\varphi : R \to S$ nem azonosan nulla gyűrűhomomorfizmusra két egységelemes gyűrű között, amely az egységelemet nem az egységelembe viszi. Lehet-e $\varphi$ szürjektív? Van-e olyan példa, ahol $S$ nullosztómentes?

**6.** ***(5.1.23)*** Igazoljuk, hogy ha $m$ és $n$ relatív prím, akkor $\mathbb{Z}_{nm}$ izomorf $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m$-mel.

**7.** ***(5.1.25)*** Adjunk példát egy-egy olyan részgyűrűre a $\mathbb{Q}[x]$, illetve a $\mathbb{Z}[x]$ polinomgyűrűkben, amely nem ideál, de tartalmaz minden $n$-re $n$-edfokú polinomot.

**8.** ***(5.1.27)*** Legyen $R$ gyűrű. Igazoljuk, hogy az $(r, n)(s, m) = (rs + mr + ns, nm)$ szorzásra nézve az $R^+ \times \mathbb{Z}^+$ csoport egységelemes gyűrűvé válik, melyben az $(r, 0)$ alakú elemek $R$-rel izomorf részgyűrűt alkotnak. Ezért *minden gyűrű beágyazható egységelemes gyűrűbe.*

**9.** ***(5.1.31)*** Igazoljuk, hogy az $R \times S$ gyűrű pontosan akkor egységelemes, ha $R$ és $S$ is az, és ilyenkor minden ideálja $I \times J$ alakú, ahol $I \lhd R$ és $J \lhd S$.

**10.** ***(5.2.14)*** Osztályozzuk izomorfia szerint az alábbi faktorgyűrűket: $\mathbb{Z}_4 /\{0\}$, $\mathbb{Z}_8 /\{0, 4\}$, $\mathbb{Z}_{16} /\{0, 4, 8, 12\}$, $2\,\mathbb{Z} /(8)$, $2\,\mathbb{Z}_{16} /(8)$, $\mathbb{Z} /(4)$, $4\,\mathbb{Z} /(16)$, $\mathbb{Z}[x]/(4, x)$ (ha $n$ egész, akkor $nR$ az $R$ gyűrű $\{nr : r \in R\}$ részgyűrűjét jelöli).

**11.** ***(5.2.7)*** Tekintsük az „$i$ behelyettesítése" homomorfizmust. Az ebből a homomorfizmustétellel kapott $\mathbb{R}[x]/(x^2 + 1) \cong \mathbb{C}$ izomorfizmusnál mi az $x + 1$, $x^2$, $x^3 + 3x + 7$, $bx + a$ polinomok maradékosztályainak a képe $\mathbb{C}$-ben?

**12.** ***(5.2.8)*** Igazoljuk, hogy $\mathbb{Q}[x]/(x^3 - 2) \cong \left\{a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4} \,:\, a, b, c \in \mathbb{Q}\right\}$.

**13.** ***(5.2.10)*** Írjuk föl az $L = \mathbb{Z}_2[x]/(x^2 + x + 1)$ faktorgyűrű műveleti tábláit, és igazoljuk, hogy testet kaptunk. Keressünk benne $\mathbb{Z}_2$-vel izomorf $\{O, E\}$ résztestet (ahol $E$ az egységelem, $O$ a nullelem), és adjuk meg $L$-ben az $Ex^2 + Ex + E$ polinom gyökeit.

**14.** ***(5.2.15)*** A $\mathbb{Q}[x]/(x^2 + x + 1)$-ben mi az $x + (x^2 + x + 1)$ inverze?

**15.** ***(5.2.17)*** Határozzuk meg $\mathbb{R}[x, y]/(x^2, xy, y^2)$ ideáljait.

**16.** ***(5.2.18)*** Igazak-e az alábbi gyűrű-izomorfizmusok?
(1) $\mathbb{R}[x]/(x^2+2) \cong \mathbb{C}$.
(2) $\mathbb{R}[x]/(x^2-1) \cong \mathbb{C}$.
(3) $\mathbb{R}[x]/(x^2-1) \cong \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
(4) $\mathbb{G}/(5) \cong \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5$ (itt $\mathbb{G}$ a Gauss-egészek gyűrűje).
(5) $\mathbb{G}/(3) \cong \mathbb{Z}_3[x]/(x^2+1)$. Test ez?
(6) $\mathbb{G}/(2) \cong \mathbb{Z}_4$.
(7) $\mathbb{C}[x,y]/(x) \cong \mathbb{C}[y]$.

**17.** ***(5.2.19)*** Lehet-e egy nullosztómentes, de nem egységelemes gyűrű faktorgyűrűje egységelemes? Lehet-e egy nullosztómentes gyűrű faktora nem nullosztómentes? És fordítva?

**18.** ***(5.3.14)*** Számítsuk ki a $\mathbb{Z}_m$ gyűrűben az $n$ elem annullátorát.

**19.** ***(5.3.16)*** Mely $m > 0$ egészekre igaz, hogy a $\mathbb{Z}_m$ gyűrűben a nullosztók a nullával együtt ideált alkotnak?

**20.** ***(5.3.17)*** Legyen $M$ az a kétszer kettes mátrix, amelynek mindegyik eleme 1. Számítsuk ki az $\mathbb{R}^{2\times 2}$ gyűrűben az $M$ jobb és bal annullátorát.

**21.** ***(5.1.7)*** Adjunk példát olyan balideálra (alkalmas gyűrűben), amely nem jobbideál.

**22.** ***(5.3.18)*** Legyen $R$ egységelemes gyűrű. Mutassuk meg, hogy az $R^{n\times n}$ teljes mátrixgyűrű ideáljai pontosan az $I^{n\times n}$ részgyűrűk, ahol $I$ ideálja $R$-nek.

**23.** ***(5.3.19)*** Igazoljuk, hogy egy $T$ test fölötti $n \times n$-es felső háromszög-mátrixok $R$ gyűrűjében ideált alkotnak azok a mátrixok, amelyeknek a főátlójában végig nulla áll, és a szerinte vett faktor a $T^n$ direkt hatvánnyal izomorf.

**24.** ***(5.4.2)*** Tekintsük a $\mathbb{Q}[x_1, x_2, \ldots]$ polinomgyűrűt. Igazoljuk, hogy ebben nem teljesül az ideálokra a maximumfeltétel.

**25.** ***(5.4.5)*** Az $\mathbb{R}^{n\times n}$-ben teljesül-e balideálokra a minimum-, illetve a maximumfeltétel?

**26.** ***(5.4.6)*** Mutassuk meg, hogy a $\mathbb{Z}[x]$ gyűrűben $(2, x)$, a $\mathbb{C}[x, y]$ gyűrűben pedig $(x, y)$ maximális ideál. Mely polinomokból állnak ezek az ideálok? Melyik ismert gyűrűvel izomorf a szerintük vett faktorgyűrű?

**27.** ***(5.4.7)*** Mutassuk meg, hogy egységelemes gyűrűben minden valódi balideál része egy maximális balideálnak (amely tehát a valódi balideálok halmazában maximális).

**28.** ***(5.4.8)*** Legyen $I$ ideál az $R$ gyűrűben. Mutassuk meg, hogy azon $J$ ideálok között, melyekre $I \cap J = \{0\}$, van maximális.

**29.** ***(5.4.9)*** Mutassuk meg, hogy ha az $R \neq 0$ nullosztómentes gyűrű balideáljaira érvényes a minimumfeltétel, akkor $R$ ferdetest.

**30.** ***(5.4.10)*** Igazoljuk, hogy minden végesen generált (nem egyelemű) csoportnak van maximális részcsoportja, de a racionális számok additív csoportjának nincs.

**31.** ***(5.4.11)*** Legyen $I$ ideál egy $R$ gyűrűben, és $J$ ideálja $I$-nek. Mutassuk meg, hogy a $J$ által $R$-ben generált ideál köbe része $J$-nek. Vezessük le ebből, hogy egy gyűrű minden (a nem nulla ideálok között) minimális ideálja vagy egyszerű gyűrű, vagy zérógyűrű. Érvényes az analóg állítás csoportok között is, vagyis ha a $G$ csoportban $N$ minimális normálosztó, akkor igaz-e, hogy $N$ vagy kommutatív, vagy egyszerű csoport?