Bsc algebra3 gyakorlat

Második feladatsor (2010 szept. 23.)

$B = A^*$ akkor és csak akkor, ha minden u, v vektorra $\langle Au, v\rangle = \langle u, Bv\rangle$. Az A^* mátrixa – ortonormált bázisban – az A mátrixának transzponáltja $\mathbb{R}$ felett, és az A mátrixának transzponált konjugáltja $\mathbb{C}$ felett. Az euklideszi terek speciális transzformációinak elnevezése a következő:

	$\mathbb{R}$	$\mathbb{C}$
$A^* = A$	szimmetrikus	önadjungált
$A^* = A^{-1}$	ortogonális	unitér
$AA^* = A^*A$		normális

Egy transzformáció akkor és csak akkor unitér (ortogonális), ha távolságtartó, azaz ha skalárszorzattartó, azaz ha ONB-t ONB-be visz. Egy komplex feletti transzformáció akkor és csak akkor diagonalizálható unitér transzformációval (azaz alkalmas ortonormált bázisban), ha normális. Egy valós feletti transzformáció akkor és csak akkor diagonalizálható ortogonális transzformációval (azaz alkalmas ortonormált bázisban), ha szimmetrikus (ez a főtengelytétel). Unitér transzformáció sajátértékei egységnyi abszolút értékűek. Önadjungált transzformáció sajátértékei valósak.

1. Bizonyítsuk be, hogy páronként ortogonális alterek összege mindig direkt összeg.

2. Legyen B komplex pozitív szemidefinit bilineáris függvény. Igazoljuk az alábbiakat.
(1) $B(u,u)B(\lambda u+v, \lambda u+v) + B(u,v)B(v,u) = B(u, \lambda u+v)B(\lambda u+v, u) + B(u,u)B(v,v)$.
(2) $|B(u,v)|^2 \leq B(u,u)B(v,v)$ (CBS egyenlőtlenség). Mikor áll egyenlőség?

3. Álljon a $W \leq \mathbb{R}^4$ altér azokból a vektorokból, melyek koordinátaösszege nulla. Határozzuk meg az $(1,2,3,4)$ pont távolságát ettől a „hipersík”-tól.

4. Legyen $b_1, \ldots, b_n$ bázis egy euklideszi térben. Bizonyítsuk be, hogy pontosan egy olyan $c_1, \ldots, c_n$ bázis létezik, melyre $\langle b_i, c_j\rangle = \delta_{ij}$.

5. Egy n-dimenziós valós euklideszi térben maximálisan hány olyan nemnulla vektor adható meg, melyek közül bármely kettő szöge α, ha $\alpha = 60°$, illetve ha $\alpha = 120°$?

6. Igazoljuk, hogy $A^2 = 0 \implies Av \perp A^*v$. Igaz-e a megfordítás $\mathbb{C}$ illetve $\mathbb{R}$ felett?

7. Igazoljuk, hogy ha $Av = \lambda v$ és $A^*w = \mu w$, akkor $\overline{\lambda} = \mu$ vagy $v \perp w$.

8. Mutassuk meg, hogy $\operatorname{Ker} A^* = (\operatorname{Im} A)^\perp$ és $\operatorname{Im} A^* = (\operatorname{Ker} A)^\perp$.

9. Bizonyítsuk be, hogy $A^*A = 0 \implies A = 0$.

10. Bizonyítsuk be, hogy $A^*B = B^*A = 0 \implies \operatorname{Im}(A+B) = \operatorname{Im} A \oplus \operatorname{Im} B$.

11. Legyen $M = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
(1) Diagonalizáljuk M-et alkalmas bázisban.
(2) Adjuk meg M összes lehetséges felső háromszögmátrix alakját $\mathbb{C}$ tetszőleges ortonormált bázisában. Diagonalizálható-e M unitér transzformációval?

12. Mutassuk meg, hogy egy normális transzformáció sajátalterei páronként merőlegesek. Igaz-e a megfordítás?