Bsc algebra3 matematikus gyakorlat

Tizenegyedik feladatsor (2010. dec. 2.)

1. ***(7.8.17)*** Melyik Abel-csoporttal ($\mathbb{Z}$-modulussal) izomorfak az alábbi csoportok? Itt p prím, és $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ a kváziciklikus csoport. $\mathbb{Z}^+ \otimes \mathbb{Z}_n^+$, $\mathbb{Z}_m^+ \otimes \mathbb{Z}_n^+$, $\mathbb{Q}^+ \otimes \mathbb{Z}_n^+$, $\mathbb{Z}_{p^\infty} \otimes \mathbb{Z}_n^+$, $\mathbb{Z}_{p^\infty} \otimes \mathbb{Z}_{p^\infty}$.

2. ***(7.8.18)*** Igazoljuk, hogy tetszőleges A Abel-csoportra $\mathbb{Z}^+ \otimes A \cong A$. Általánosítsuk az állítást $\mathbb{Z}$ helyett tetszőleges gyűrűre.

3. ***(7.8.19)*** Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges B Abel-csoportra $\mathbb{Z}_m^+ \otimes B \cong B/mB$.

4. ***(7.8.20)*** Igazoljuk, hogy osztható csoportnak torziócsoporttal vett tenzorszorzata nulla.

5. ***(7.8.22)*** Legyenek M, N, K bal R-modulusok. Igazoljuk az alábbi izomorfizmusokat.

(1) $M \otimes N \cong N \otimes M$ (a tenzorszorzat kommutatív).
(2) $(M \otimes N) \otimes K \cong M \otimes (N \otimes K)$ (a tenzorszorzat asszociatív).
(3) $(M \times N) \otimes K \cong (M \otimes K) \times (N \otimes K)$. Igaz marad-e az állítás végtelen sok tényezős direkt szorzatra? És diszkrét direkt összegre?
(4) $\mathrm{Hom}_R(M \otimes N, K) \cong \mathrm{Hom}_R(M, \mathrm{Hom}_R(N, K))$.

6. ***(7.8.23)*** Adjunk példát olyan $A \leq B$ és C Abel-csoportokra, továbbá $a \in A$ és $c \in C$ elemekre, hogy $a \otimes c = 0$, ha azt a $B \otimes C$ csoportban értelmezzük, de nem nulla, ha azt az $A \otimes C$ csoportban értelmezzük, sőt $A \otimes C$ nem is izomorf $B \otimes C$ egy részcsoportjával. Igazoljuk, hogy ez nem fordulhat elő, ha A direkt összeadandója B-nek.

7. ***(7.8.24)*** Legyenek n, m rögzített egészek, A és B Abel-csoportok, $\psi : A \to A$ az a homomorfizmus, amely minden elemhez az n-szeresét rendeli, $\chi : B \to B$ pedig az a homomorfizmus, amely minden elemhez az m-szeresét rendeli. Mutassuk meg, hogy a $\psi \otimes \chi$ minden elemhez az nm-szeresét rendeli.

8. ***(7.8.25)*** Legyenek N, M, K modulusok és $\varphi : N \to M$ modulushomomorfizmus.

(1) Igazoljuk, hogy ha φ szürjektív, akkor $id_K \otimes \varphi$ is szürjektív.
(2) Igaz-e, hogy ha φ injektív, akkor $id_K \otimes \varphi$ is injektív?

Ha egy rövid egzakt sorozatot tenzorszorzunk egy modulussal, mely helyeken lesz az eredmény biztosan egzakt?

9. ***(7.8.26)*** Legyen $\varphi : x \mapsto 2x$ a $\mathbb{Z}_2^+ \to \mathbb{Z}_4^+$ beágyazás. Ekkor a $\varphi \otimes \varphi$ kifejezést kétféleképpen érthetjük. Az első értelmezés szerint ez két leképezés tenzorszorzata, a második szerint pedig a $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_2^+, \mathbb{Z}_4^+)$ csoport önmagával vett tenzorszorzatának egy eleme. Mutassuk meg, hogy $\varphi \otimes \varphi$ az egyik értelmezés szerint nulla, a másik szerint nem.

10. ***(7.8.27)*** Legyen R főideálgyűrű, T ennek a hányadosteste, és M egy végesen generált R-modulus. Mutassuk meg, hogy a $T \otimes M$ modulus vektortérré tehető T fölött, amelynek a dimenziója ugyanannyi, mint az M ciklikus modulusok direkt összegére való felbontásában a nulla rendű összeadandók száma. Adjunk új bizonyítást a felbontás egyértelműségére.

11. ***(7.8.16)*** Számítsuk ki két lineáris leképezés tenzorszorzatának mátrixát.

12. ***(7.9.23)*** Legyen az R gyűrű k darab ferdetest fölötti teljes mátrixgyűrű direkt szorzata. Mutassuk meg, hogy R fölött pontosan k darab nem izomorf egyszerű modulus van, és minden R-modulus ezek közül néhánynak a direkt összegével izomorf (azaz teljesen reducibilis).