Bsc algebra3 gyakorlat

Első feladatsor (2010 szept. 16)

Legyen a B szimmetrikus bilineáris függvény mátrixa M. Végezzük el rajta a következő, módosított Gauss-eliminációt. Az elemi lépés most az, hogy az egyik sorból kivonjuk egy másik skalárszorosát, és *ezután azonnal* az ugyanannyiadik oszlopból is kivonjuk a megfelelő oszlop ugyanannyiszorosát. Hasonlóképpen kicserélhetünk két sort, és *utána azonnal* a megfelelő két oszlopot. Az M mátrixot a főátlóban lefelé haladva diagonalizáljuk ezekkel a lépésekkel, ezért elég azt megmutatni, hogy az első sor és oszlop nem átlóbeli elemei kinullázhatók. Ez nyilvánvaló akkor, ha a bal felső sarokban nem nulla áll. Ha ott nulla áll, de a főátló nem végig nulla, akkor a bal felső sarokba cserélünk egy nem nulla elemet. Végül ha a főátló végig nulla, akkor az első oszlop egy nem nulla elemének sorát adjuk hozzá az első sorhoz (és a megfelelő oszlopot is az első oszlophoz).

1. Tekintsük a $-x^2 + 10xy - y^2 - z^2$ és a $-3x\overline{x} + 4ix\overline{y} - 4i\overline{x}y + 3y\overline{y} - z\overline{z}$ kvadratikus alakot $\mathbb{R}$ illetve $\mathbb{C}$ felett. Írjuk fel ezek mátrixát, transzformáljuk őket négyzetösszeggé a fenti módszerrel is és a Gram-Schmidt eljárással is, végül határozzuk meg karakterüket.

2. Mely testek fölött diagonalizálható az $x_1y_2+x_2y_1$ szimmetrikus bilineáris függvény? A valós test esetében adjuk meg az összes ortogonális bázist.

3. Legyen Q kvadratikus alak egy valós feletti vektortéren, $e_1, \ldots, e_n$ egy Q-ortogonális bázis, és $U = \langle e_i \mid Q(e_i) > 0\rangle$, $V = \langle e_i \mid Q(e_i) \geq 0\rangle$, $W = \langle e_i \mid Q(e_i) = 0\rangle$. E három altér közül melyek függetlenek az $e_1, \ldots, e_n$ bázistól?

4. Ellentmond $x^2 + y^2 + (x + y)^2 = (\sqrt{3}x)^2 + (\sqrt{3}y)^2 - (x - y)^2$ a tehetetlenségi tételnek? (Mindkettő négyzetösszeg, de az egyikben van egy mínusz előjel is. Hogy lehet ez?)

5. Igazoljuk, hogy a fenti eljárás diagonális mátrixhoz vezet. Hogyan módosul a bázis az elemi lépések során?

6. Igazoljuk, hogy egy valós test feletti kvadratikus alak akkor és csak akkor pozitív definit, ha mátrixában a bal felső sarokban álló aldeterminánsok (az úgynevezett főminorok) mind pozitívak, és akkor és csak akkor negatív definit, ha a növekvő főminorok előjeleinek sorozata $-, +, -, +, -, \ldots$.

7. Mely bilineáris függvények mátrixa nem függ a bázistól?

8. Egy bilineáris függvény **antiszimmetrikus**, ha $B(u, v) = -B(v, u)$ minden u, v-re. Igazoljuk valós felett, hogy B akkor és csak akkor antiszimmetrikus, ha a hozzá tartozó kvadratikus alak nulla, továbbá hogy a bilineáris függvények tere a szimmetrikus és az antiszimmetrikus bilineáris függvények altereinek direkt összege.

9. Igazoljuk, hogy minden komplex bilineáris függvény egyértelműen írható $A+Bi$ alakban, ahol A és B Hermitikus.

10. Legyen B pozitív definit bilineáris függvény. Igaz-e, hogy tetszőleges $v_1, \ldots, v_n$ vektorok akkor és csak akkor függetlenek, ha a $|((B(v_i, v_j))|$ determináns nullától különböző?

11. Mely valós szimmetrikus bilineáris függvényekre eleme minden nem nulla vektor egy ortogonális bázisnak?

12. Mely B komplex bilineáris függvényekre igaz, hogy $B(u, v) = 0 \Longleftrightarrow B(v, u) = 0$?