Bsc algebra2 gyakorlat

2. zárthelyi – megoldások és pontozás, 2022. május 9.

1. A karakterisztikus polinom $x^2(2-x)$, a minimálpolinom ennek olyan osztója, melynek mindkét sajátérték (0 és 2) gyöke (1 pont). Ilyen osztó konstans szorzó erejéig csak az $x(x-2)$ és az $x^2(x-2)$ van (1 pont). Előbbinek nem gyöke a mátrix, hiszen a mátrixot behelyettesítve $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ adódik (1 pont), azért a minimálpolinom $x^2(x-2)$ (1 pont). A mátrix nem diagonalizálható, mert a minimálpolinomnak van kétszeres gyöke (1 pont): ez utóbbi abból is látszik, ha az egyenletrendszer megoldásával meghatározzuk a 0-hoz tartozó sajátalteret (ami 1-dimenziós). Tehát a normálalak $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ (1 pont). A Jordan-alak meghatározásánál azt is mondhatjuk, hogy egy adott gyöktényező (jelen esetben x) kitevője a minimálpolinomban megegyezik a legnagyobb, ehhez a sajátértékhez tartozó Jordan-blokk méretével, tehát 2×2 a legnagyobb 0-hoz tartozó blokk.

2. A $v_1 = (2, -1, 0)$ és a $v_2 = (0, 1, -1)$ vektor merőleges W-re és lineárisan független (1 pont), ezekkel végezzük a Gram–Schmidt ortogonalizációt. $b_1 := \frac{1}{\sqrt{5}}(2, -1, 0)$ egységhosszú (1 pont) és $\langle b_1, v_2 \rangle = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ (1 pont), tehát $b_2' := b_2 + \frac{1}{\sqrt{5}} b_1 = (2/5, 4/5, -1)$ már merőleges b_1-re és W-re is, tehát lenormálva $b_2 = \frac{1}{3\sqrt{5}}(2, 4, -5)$ a másik egységvektor (1 pont). A $v = (1, 0, 0)$ távolsága a W egyenestől pedig $\sqrt{\langle b_1, v \rangle^2 + \langle b_2, v \rangle^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ (2 pont).

2. megoldás: Ha a Gram-Schmidt eljárást a W-irányú $e_1 = \frac{1}{3}(1, 2, 2)$ egységvektorral és $v = (1, 0, 0)$-val kezdjük, akkor $v = \frac{1}{3}e_1 + (\frac{8}{9}, -\frac{2}{9}, -\frac{2}{9})$ (1 pont) és a keresett távolság $|(\frac{8}{9}, -\frac{2}{9}, -\frac{2}{9})| = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ (2 pont), az egyik egységvektor $e_2 = \frac{3}{2\sqrt{2}}(\frac{8}{9}, -\frac{2}{9}, -\frac{2}{9}) = \frac{1}{\sqrt{18}}(4, -1, -1)$ (1 pont), a másik pedig vektoriális szorzással $e_1 \times e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, -1)$ (2 pont).

3. A kvadratikus alak mátrixa $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ (1 pont). A karakterisztikus polinomja $-x^3 + 4x^2 - 3x = -x(x-1)(x-3)$ (1 pont), speciálisan a karakter pozitív szemidefinit (1 pont). Az egyenletrendszereket megoldva az 1-hez tartozó (egyik) normált sajátvektor $(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)^T$, a 3-hoz tartozó $(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}})^T$, a 0-hoz tartozó pedig $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})^T$ (2 pont). Tehát a keresett négyzetösszeg alak

$$x^2 + y^2 + 2z^2 - 2xz - 2yz = 0 \cdot \left(\frac{x+y+z}{\sqrt{3}} \right)^2 + 1 \cdot \left(\frac{x-y}{\sqrt{2}} \right)^2 + 3 \cdot \left(\frac{x+y-2z}{\sqrt{6}} \right)^2$$

(1 pont).

4. A pontosan akkor diagonalizálható ortonormált bázisban, ha normális, azaz felcserélhető az adjungáltjával (1 pont). A leképezés mátrixa $[A] = \begin{pmatrix} z & iz & 0 & 0 \\ i\overline{z} & z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z & z \\ 0 & 0 & -z & z \end{pmatrix}$ (1 pont), adjungáltja $[A^*] = [A]^* =$

$\begin{pmatrix} \overline{z} & -iz & 0 & 0 \\ -i\overline{z} & \overline{z} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \overline{z} & -\overline{z} \\ 0 & 0 & \overline{z} & \overline{z} \end{pmatrix}$. Összeszorozva két oldalról

$$[A]^*[A] = \begin{pmatrix} 2|z|^2 & i(|z|^2 - z^2) & 0 & 0 \\ i(\overline{z}^2 - |z|^2) & 2|z|^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2|z|^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2|z|^2 \end{pmatrix} = [A][A]^* \ ,$$

azaz a transzformáció minden $z \in \mathbb{C}$-re normális (1 pont). Ha A önadjungált, akkor az első sor második elemét összehasonlítva $iz = -iz$, azaz $z = 0$ – ebben az esetben $A = 0$, ami valóban önadjungált (1 pont). Másrészt A pontosan akkor unitér, ha $[A]^*[A]$ az egységmátrix, azaz ha $2|z|^2 = 1$ és $i(|z|^2 - z^2) = i(\overline{z}^2 - z^2) = 0$. Speciálisan $z^2 = |z|^2$ nemnegatív valós, azaz $z \in \mathbb{R}$, tehát $z = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ esetén lesz A unitér (1 pont). Végezetül $z = 1$ esetén $A(v) = (1+i, 1+i, 2, 0)^T$, így $\langle A(v), v\rangle = \overline{(1+i, 1+i, 2, 0)}(1,1,1,1)^T = (1-i) + (1-i) + 2 + 0 = 4 - 2i$ (1 pont).

5. Az, hogy A rangja 2 azt jelenti, hogy a képterének a dimenziója 2 (1 pont), tehát a magterének pedig $n-2$ a dimenzióösszefüggés miatt (1 pont). A magtér nem más, mint a 0-hoz tartozó sajátaltér, tehát a 0 sajátérték geometriai multiplicitása $n-2$ (1 pont). Speciálisan a 0-n kívül legfeljebb két sajátértéke van A-nak (1 pont), azaz a -1, $-1/2$ és $-1/3$ közül legalább az egyik *nem* sajátérték (1 pont). Tehát $A+I$, $A+1/2\cdot I$ és $A+1/3\cdot I$ közül legalább az egyik invertálható. Node ha $A+1/2\cdot I$ (ill. $A+1/3\cdot I$) invertálható, akkor $2A+I = 2(A+1/2\cdot I)$ (ill. $3A+I = 3(A+1/3\cdot I)$) is az (1 pont).

6. *a)* A dimenzióösszefüggés miatt $\dim U = \dim \mathrm{Im}(A)$, tehát elegendő igazolni az egyik irányú tartalmazást (1 pont). Legyen $v \in V$ tetszőleges, ekkor $v = w+u$ alakba írható, ahol $w \in \mathrm{Ker}(A)$ és $u \in U$ (1 pont). Ekkor $Av = Aw + Au = Au \in U$, hiszen U invariáns altér. Tehát $\mathrm{Im}(A) \subseteq U$ (1 pont).

b) Az *a)* részhez hasonlóan $\dim U = \dim \mathrm{Ker}(A)$, ezért ismét elegendő az egyik irányú tartalmazást belátni (1 pont). Ha $u \in U$, akkor mivel U egy A-invariáns altér, $Au \in U$. Node $Au \in \mathrm{Im}(A)$, azaz $Au \in U \cap \mathrm{Im}(A) = \{0\}$, azaz $Au = 0$ (1 pont). Ez azt jelenti, hogy $u \in \mathrm{Ker}(A)$ minden $u \in U$-ra igaz, azaz $U \subseteq \mathrm{Ker}(A)$ (1 pont).

7. Vegyük észre, hogy $A + A^*$ önadjungált (1 pont), így mivel minden sajátértéke pozitív, ezért az $A + A^*$-hoz tartozó kvadratikus alak pozitív definit (1 pont). Ez azt jelenti, hogy tetszőleges nemnulla $v \in \mathbb{C}^n$ vektorra $\langle v, (A+A^*)v\rangle > 0$ (1 pont). Tegyük föl, hogy A nem invertálható, azaz van olyan $v \neq 0$ vektor, melyre $Av = 0$. Ekkor

$$0 < \langle v, (A+A^*)v\rangle = \langle v, Av\rangle + \langle v, A^*v\rangle = \langle v, Av\rangle + \langle Av, v\rangle = 0 \ ,$$

ellentmondás (3 pont).

Abban az esetben, ha A-ról feltesszük, hogy normális, akkor ONB-ben diagonalizálható és ebben a diagonális mátrixban ha a főátlóban valahol 0 áll, akkor nyilván ugyanott A^*-ban és $A+A^*$-ban is 0 van, ami ellentmond annak, hogy $A + A^*$ minden sajátértéke pozitív.

Az $n = 2$ esetben alkalmas bázisban $A + A^* = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ alakú, ahol $\alpha, \beta > 0$ valós. Ekkor felírhatjuk elemekkel az $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ mátrixot, amire tehát $a + \overline{a} = \alpha$, $d + \overline{d} = \beta$, és $c = -\overline{b}$. Tegyük föl, hogy $0 = \det A = ad - bc = ad + |b|^2$. Node $\mathrm{Re}(a) = \alpha/2 > 0$, azaz a a jobbfélsíkban van, tehát szöge $\arg(a) \in (-\pi/2, \pi/2)$. Ugyanígy $\arg(d) \in (-\pi/2, \pi/2)$, speciálisan ad nem lehet ≤ 0 valós.