Bsc algebra2 gyakorlat

1. zárthelyi, 2022. március 28. – megoldások

1. a) Mivel $x^3 + x + 2 - 2(2x^3 + 3x + 3) + 3x^3 + 5x + 4 = 0$, ezért a keresett rang nem lehet 3 (1 pont). Ugyanakkor $2x^3 + 3x + 3 - 2(x^3 + x + 2) = x - 1$ benne van a generált altérben (1 pont), továbbá $x - 1$ és $x^3 + x + 2$ lineárisan függetlenek, hiszen különböző a fokuk (1 pont), ezért a keresett rang 2.

b) Egyrészt $(x^4 + x + 3) + (2x^4 + x + 3) - (3x^4 + 2x + 6) = 0$, azaz a generált altér legfeljebb kétdimenziós (1 pont). Viszont $x^4 = (2x^4 + x + 3) - (x^4 + x + 3)$ és $x + 3 = 2(x^4 + x + 3) - 2x^4 + x + 3 = x + 3$ benne van az altérben és lineárisan független, tehát ezek bázist alkotnak az altérben (1 pont). Speciálisan az altér elemei $d \cdot x^4 + c \cdot (x + 3)$ alakúak, ezért ($d = 4$ és) $3c = 7$, azaz $c = 7/3$ az egyetlen megfelelő érték (1 pont). A feladatot másképp is megoldhatjuk: az a kérdés, hogy a $\lambda_1(x^4 + x + 3) + \lambda_2(2x^4 + x + 3) + \lambda_3(3x^4 + 2x + 6) = 4x^4 + cx + 7$ egyenlet, azaz a

$$\begin{array}{rcrcrcl} \lambda_1 & + & 2\lambda_2 & + & 3\lambda_3 & = & 4 \\ \lambda_1 & + & \lambda_2 & + & 2\lambda_3 & = & c \\ 3\lambda_1 & + & 3\lambda_2 & + & 6\lambda_3 & = & 7 \end{array}$$

rendszer milyen c-re oldható meg. Gauß-elmináció után azt kapjuk, hogy ha $c = 7/3$, akkor van megoldás, ha pedig $c \neq 7/3$, akkor van tiltott sor.

2. a) Az áttérés S mátrixának első oszlopában az $\alpha(1, 0) + \beta(1, 1) = (2, 2)$ egyenletrendszer megoldásai állnak, ez $\alpha = 0$ és $\beta = 2$. (1 pont) A második oszlopban pedig a $\gamma(1, 0) + \delta(1, 1) = (2, 1)$ egyenletrendszer megoldásai állnak, ez $\gamma = 1$ és $\delta = 1$, tehát $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. (1 pont) $S^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ (1 pont), így a bázistranszformáció képlete alapján az eredmény

$$S^{-1}MS = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} .\text{(1 pont)}$$

A feladatot úgy is megoldhatjuk, hogy az M mátrix azt jelenti, hogy $C(b_1) = 2b_1 + b_2$ és $C(b_2) = b_2$, ahol $b_1 = (1, 0)$ és $b_2 = (1, 1)$. Tehát $C(b'_1) = C(2, 2) = 2C(b_2) = 2b_2 = b'_1$, azaz az új mátrix első oszlopa $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, illetve $C(b'_2) = C(2, 1) = C(b_1 + b_2) = 2b_1 + 2b_2 = 2b'_2$, azaz a második oszlop $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

b) $C(4, 3) = C((1, 0) + 3(1, 1)) = C(1, 0) + 3C(1, 1) = 2(1, 0) + (1, 1) + 3(1, 1) = (6, 4)$. (2 pont)

3. A B nem lineáris, mivel $B(0) = 0 + x - 0' = x \neq 0$ (2 pont). Másrészt $A(1) = 1 + x$ (1 pont), $A(x) = x + x^2 - 1$ (1 pont), $A(x^2) = x^2 + x^3 - 2x$ (1 pont), azaz a keresett mátrix az $(1, x, x^2)$, $(1, x, x^2, x^3)$ bázispárban $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (1 pont).

4. Ha $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, akkor $A(M) = \begin{pmatrix} 2a - b - c & 2c - d - a \\ 2b - a - d & 2d - b - c \end{pmatrix}$. (1 pont) Tehát $\mathrm{Ker}(A)$ azon M mátrixokból áll, melyekre $2a - b - c = 2c - d - a = 2b - a - d = 2d - b - c = 0$, azaz $a = b = c = d$ (1 pont). Speciálisan $\dim \mathrm{Ker}(A) = 1$ és $\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\}$ bázis (1 pont). A dimenzióösszefüggés szerint $\dim \mathrm{Ker}(A) + \dim \mathrm{Im}(A) = \dim V = 4$, azaz $\dim \mathrm{Im}(A) = 3$ (1 pont). Mivel V-ben bázist alkotnak az E_{ij} mátrixok ($i, j = 1, 2$), ezért az $A(E_{ij})$ mátrixok generátorrendszert alkotnak $\mathrm{Im}(A)$-ban (1 pont). Ezek összege $A(\sum_{i,j} E_{ij}) = A \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 0$, tehát közülük bármely három megfelel bázisnak. Pl. $\{\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\}$ bázis $\mathrm{Im}(A)$-ban (1 pont).

5. Az U annak a $V \to \mathbb{R}$ szürjektív lineáris leképezésnek a magja, mely egy adott vektorhoz a koordináták összegét rendeli, speciálisan a dimenziótétel miatt $\dim U = 3 - 1 = 2$ (1 pont). Hasonlóképp W annak a $V \to \mathbb{R}$

szürjektív lineáris leképezésnek a magja, mely egy vektorhoz az első két koordináta különbségét rendeli, így $\dim W = 2$ (1 pont). Mivel $U \neq W$ (pl. $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \in W \setminus U$), ezért $2 = \dim U < \dim(U+W) \leq \dim V = 3$, azaz $U+W = V$. Az alterekre vonatkozó dimenzióösszefüggés miatt $\dim(U \cap W) = \dim U + \dim W - \dim(U+W) = 2+2-3 = 1$ (1 pont). Legyen $v_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$. Ekkor $U \cap W$-ben bázis $\{v_1\}$ (1 pont), U-ban $\{v_1, v_2\}$ (1 pont), W-ben $\{v_1, v_3\}$ (1 pont), $U+W$-ben pedig $\{v_1, v_2, v_3\}$ (ez utóbbi automatikus az előzőekből).

6. F mátrixa a standard bázisban $\begin{pmatrix}-1/2 & -\sqrt{3}/2\\ \sqrt{3}/2 & -1/2\end{pmatrix}$ (1 pont), T mátrixa pedig $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ (1 pont). Mivel F és $F^3 = id$ lineárisan független, az általuk generált altér 2-dimenziós, mégpedig a $\begin{pmatrix}a & -b\\ b & a\end{pmatrix}$ alakú mátrixokból áll (1 pont). Mátrixszorzással FT mátrixa $\begin{pmatrix}-1/2 & -\sqrt{3}/2\\ -\sqrt{3}/2 & 1/2\end{pmatrix}$ (1 pont), ez is lineárisan független T-től és az általuk generált altérben a $\begin{pmatrix}c & d\\ d & -c\end{pmatrix}$ alakú mátrixok vannak (1 pont). Ezen két kétdimenziós altér metszete csak a 0-ból áll (1 pont), ezért együtt generálják a sík lineáris transzformációiból álló 4-dimenziós vektorteret, tehát a keresett rang 4 (1 pont).

7. *1. megoldás:* Legyen $a = \dim \operatorname{Im} A, b = \dim \operatorname{Im} A^2, c = \dim \operatorname{Im} A^3$. A dimenziótétel miatt $b = a - y$, ahol $y = \dim(\operatorname{Ker} A \cap \operatorname{Im} A)$ és $c = b - z$, ahol $z = \dim(\operatorname{Ker} A \cap \operatorname{Im} A^2)$. (3 pont) Itt $b - c = z \leq y = a - b$ (mert $\operatorname{Ker} A \cap \operatorname{Im} A^2$ altér $\operatorname{Ker} A \cap \operatorname{Im} A$-ban), ami átrendezve épp a bizonyítandó állítás. (3 pont)

2. megoldás: Az órán tanult $\operatorname{Im}(BA) \subseteq \operatorname{Im} B$ összefüggést $B = A$ és $B = A^2$ választással alkalmazva azt kapjuk, hogy $\operatorname{Im} A \supseteq \operatorname{Im} A^2 \supseteq \operatorname{Im} A^3$ (1 pont). Vegyünk egy $b_1, \ldots, b_k$ bázist $\operatorname{Im} A^3$-ben, majd egészítsük ki $c_1, \ldots, c_n$ vektorokkal $\operatorname{Im} A^2$ bázisává, azaz $\dim \operatorname{Im} A^3 = k$, $\dim \operatorname{Im} A^2 = k + n$. A bizonyítandó állítás azzal ekvivalens, hogy $\dim \operatorname{Im} A \geq 2 \dim \operatorname{Im} A^2 - \dim \operatorname{Im} A^3 = k + 2n$ (1 pont). Mivel $c_1, \ldots, c_n \in \operatorname{Im} A^2$, ezért vannak olyan $v_1, \ldots, v_n$ vektorok, hogy $c_j = A^2(v_j)$ $(j = 1, \ldots, n)$. Belátjuk, hogy a $\{b_1, \ldots, b_k, A^2(v_1), \ldots, A^2(v_n), A(v_1), \ldots, A(v_n)\}$ vektorrendszer lineárisan független. Ebből következik az állítás, hiszen a vektorok száma $k + 2n$ és mindegyik vektor $\operatorname{Im} A$-ban van (1 pont). Tegyük fel ugyanis, hogy

$$\beta_1 b_1 + \cdots + \beta_k b_k + \gamma_1 A^2(v_1) + \cdots + \gamma_n A^2(v_n) + \alpha_1 A(v_1) + \cdots + \alpha_n A(v_n) = 0 \ .$$

Átrendezve

$$\alpha_1 A(v_1) + \cdots + \alpha_n A(v_n) = -(\beta_1 b_1 + \cdots + \beta_k b_k + \gamma_1 A^2(v_1) + \cdots + \gamma_n A^2(v_n)) \in \operatorname{Im} A^2 \ ,$$

így az A lineáris leképezést a fenti egyenletre alkalmazva (és a linearitást használva)

$$\alpha_1 A^2(v_1) + \cdots + \alpha_n A^2(v_n) = -(\beta_1 A(b_1) + \cdots + \beta_k A(b_k) + \gamma_1 A^3(v_1) + \cdots + \gamma_n A^3(v_n)) \in \operatorname{Im} A^3$$

(2 pont). Viszont mivel $\operatorname{Im} A^3$-ben bázis $b_1, \ldots, b_k$, ezért vannak olyan $\beta'_1, \ldots, \beta'_k$ számok, melyekkel

$$\alpha_1 A^2(v_1) + \cdots + \alpha_n A^2(v_n) = \beta'_1 b_1 + \cdots + \beta'_k b_k \ .$$

Ezt 0-ra rendezve egy lineáris összefüggést kapunk $\operatorname{Im} A^2$ bázisvektorai között, tehát $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = \beta'_1 = \cdots = \beta'_k = 0$. Az állítás következik $b_1, \ldots, b_k, A^2(v_1), \ldots, A^2(v_n)$ vektorok lineáris függetlenségének ismételt alkalmazásával (1 pont).