Bsc algebra2 gyakorlat

2. zárthelyi, 2022. május 9.

Mindegyik feladatban **indoklás szükséges**, a puszta eredményért nem jár pont. A feladatok 6 pontosak. A dolgozat jegye az elért pontszám hatodrésze, tehát az elégségeshez legalább 12 pontot kell szerezni. Kérjük, hogy a szerző nevét és NEPTUN-kódját **minden lapra OLVASHATÓ nyomtatott nagybetűkkel** írjátok fel. Minden feladatot **új oldalon** kezdjetek! 115 perc áll rendelkezésre.

1. Határozzuk meg a $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ mátrix minimálpolinomját és Jordan-féle normálalakját.

2. Legyen W az origót az $(1,2,2)$ ponttal összekötő egyenes $\mathbb{R}^3$-ban. Adjunk meg két olyan egységhosszú vektort $\mathbb{R}^3$-ban, melyek egymásra és W-re is merőlegesek, továbbá határozzuk meg az $(1,0,0)$ pont távolságát W-től.

3. Hozzuk **ortonormált bázisban** négyzetösszeg alakra az $x^2 + y^2 + 2z^2 - 2xz - 2yz$ kvadratikus alakot és határozzuk meg a karakterét.

4. Tekintsük $\mathbb{C}^4$-en az

$$A \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} zu_1 + izu_2 \\ i\bar{z}u_1 + zu_2 \\ zu_3 + zu_4 \\ -zu_3 + zu_4 \end{bmatrix}$$

lineáris transzformációt. Vizsgáljuk meg, hogy $z \in \mathbb{C}$ mely értékeire lesz A diagonalizálható **ortonormált bázisban** $\mathbb{C}$ fölött; unitér; illetve önadjungált. Számítsuk ki az $\langle A(v), v\rangle$ skalárszorzatot, ha $z = 1$ és $v = (1,1,1,1)^T$.

5. Tegyük fel, hogy $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ rangja 2. Igazoljuk, hogy $A+I, 2A+I, 3A+I$ közül legalább az egyik invertálható. (I itt az egységmátrixot jelöli.)

6. $(3+3$ pont$)$ Legyen A egy lineáris transzformáció a végesdimenziós V vektortéren és $U \le V$ egy A-invariáns altér. Mutassuk meg, hogy

a) ha $\mathrm{Ker}(A) \oplus U = V$, akkor $U = \mathrm{Im}(A)$;
b) ha $\mathrm{Im}(A) \oplus U = V$, akkor $U = \mathrm{Ker}(A)$.

7. Legyen $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ és tegyük föl, hogy $A + A^*$ minden sajátértéke pozitív. Mutassuk meg, hogy A invertálható. (Aki abban az esetben igazolja az állítást, ha A normális, az 2 pontot kap, aki pedig $n = 2$-re igazolja, az 3-at.)