Bsc algebra2 gyakorlat

1. zárthelyi, 2022. március 28.

Mindegyik feladatban **indoklás szükséges**, a puszta eredményért nem jár pont. A feladatok 6 pontosak. A dolgozat jegye az elért pontszám hatodrésze, tehát az elégségeshez legalább 12 pontot kell szerezni. Kérjük, hogy a szerző nevét és NEPTUN-kódját **minden lapra OLVASHATÓ nyomtatott nagybetűkkel** írjátok fel. Minden feladatot **új oldalon** kezdjetek! 115 perc áll rendelkezésre.

1. $(3+3$ pont$)$
a) Határozzuk meg az $\{x^3+x+2, 2x^3+3x+3, 3x^3+5x+4\}$ rendszer rangját $\mathbb{R}$ fölött.
b) Milyen $c \in \mathbb{R}$-re lesz $4x^4+cx+7 \in \langle x^4+x+3, 2x^4+x+3, 3x^4+2x+6\rangle$?

2. $(4+2$ pont$)$
a) Legyen V a sík pontjainak vektortere $\mathbb{R}$ fölött. A $C \in \mathrm{Hom}(V)$ lineáris transzformáció mátrixa az $\big((1,0),(1,1)\big)$ bázisban $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Mi C mátrixa a $\big((2,2),(2,1)\big)$ bázisban?
b) Hová viszi az előző pontbeli C leképezés a $(4,3)$ pontot?

3. Legyen V a legfeljebb másodfokú valósegyütthatós polinomok és a nullapolinom vektortere, W pedig a legfeljebb harmadfokú valósegyütthatós polinomok és a nullapolinom vektortere (mindkettő $\mathbb{R}$ fölött). Legyen A illetve B az a $V \to W$ leképezés, melyre
a) $A(f) = f + xf - f'$;
b) $B(f) = f + x - f'$.
Amelyik *nem* lineáris leképezés A és B közül, annál igazoljuk ezt (2 pont), amelyik pedig az, annak adjuk meg a mátrixát a szokásos bázispárban (4 pont) (azt nem kell igazolni, hogy ez a leképezés lineáris).

4. (6 pont) Legyen V a valósegyütthatós 2×2-es mátrixok vektortere és $A\colon V \to V$ az a lineáris leképezés, mely egy M mátrixhoz az $2M^T - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} M - M \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ mátrixot rendeli. Adjunk meg egy-egy bázist A képterében és magterében.

5. (6 pont) Legyen $V = \mathbb{R}^3$, U azon 3 magas oszlopvektorokból álló altér, melyekben a koordináták összege 0, W pedig azon 3 magas oszlopvektorokból álló altér, melyekben az első két koordináta megegyezik. Adjunk meg egy bázist $U \cap W$-ben, majd ezt egészítsük ki U, W, illetve $U + W$ bázisává.

6. (6 pont) Legyen F a $120°$-os forgatás a síkon, T pedig az x tengelyre való tükrözés. Határozzuk meg az $\{F, F^2, F^3, FT, F^2T, T\}$ transzformációkból álló rendszer rangját.

7. (6 pont) Legyen A egy lineáris transzformáció egy végesdimenziós vektortéren. Igazoljuk, hogy $\dim \mathrm{Im}\, A + \dim \mathrm{Im}\, A^3 \geq 2 \dim \mathrm{Im}\, A^2$.