NÉV: ____________________ ELTE AZONOSÍTÓ: ____________

II. rész (60 perc). *Minden válaszért* 0 *vagy* 1 *pont jár (negatív pontszám nincs). Indokolni nem kell. Aki elér legalább* 10 *pontot (és az I. részből is legalább hetet), annak a dolgozata már legalább elégséges; aki viszont nem éri el a* 8 *pontot, azé biztosan elégtelen. A többi esetben a vizsgajegy 17 ponttól legalább elégséges, 21 ponttól legalább közepes, és ekkor lehet jönni szóbelire, 24 ponttól legalább négyes. A szóbelin rontani nem lehet, a bizonyításokat kell tudni, és jelest csak a szóbelin lehet kapni.*

11. Adjunk ellenpéldát a következő állításra: „Ha egy vektortér-axiómában nem szerepel kétféle skalár, akkor szerepel benne összeadás”.

    Pl. $1 \cdot v = v$.

12. Adjunk meg egy olyan nem üres részhalmazt $\mathbb{C}$-ben, amely zárt a 45 fokos szögű komplex számokkal való szorzásra, de nem altér $\mathbb{C}$ fölött.

    Pl. A nulla és a $k \cdot 45$ fokos szögű számok együtt $(0 \leq k < 8)$.

13. Melyik a legnagyobb n egész, amire teljesül a következő: „n darab komplex elemű 2×2-es mátrix biztosan nem generátorrendszer **komplex** fölött.”

    3

14. Álljon X a legfeljebb harmadfokú valós együtthatós normált polinomokból. Mennyi X rangja $\mathbb{R}$ fölött?

    4

15–16. A következő levezetésben azt mutatjuk meg, hogy $\mathrm{Hom}(V)$-ben $(A + B)C = AC + BC$ tetszőleges A, B, C esetén. Minden egyes egyenlőségjelhez írjuk a mellette levő keretbe az S, T, P, N betűk egyikét aszerint, hogy annak a lépésnek mi az indoklása. A betűk jelentése:

(S) Leképezések összegének definíciója.
(T) Leképezés összegtartása.
(P) Leképezések szorzatának definíciója.
(N) A fentiek közül egyik sem.

$$\left(\mathit{Pontozás:}\ \begin{array}{ll} \text{4 helyes válasz:} & \text{2 pont;} \\ \text{2 v. 3 helyes válasz:} & \text{1 pont;} \\ \text{egyébként:} & \text{0 pont.} \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{rl} \big((A+B)C\big)(v) = & \boxed{\text{P}} \\ (A+B)\big(C(v)\big) = & \boxed{\text{S}} \\ A\big(C(v)\big) + B\big(C(v)\big) = & \boxed{\text{P}} \\ (AC)(v) + (BC)(v) = & \boxed{\text{S}} \\ (AC+BC)(v) & \end{array}$$

17. Ha $A \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^3)$ és $A^2 - 2A = 0$, akkor mik A determinánsának lehetséges értékei?

    0, 8

18. A valós fölötti $\mathbb{R}^{2\times 2}$ vektortéren az $M \mapsto M + M^*$ transzformációnak mennyi a rangja?

    3

19. Az $M \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ nem invertálható mátrixnak sajátértéke az $1 - i$. Mi a minimálpolinomja?

    $x^3 - 2x^2 + 2x$

20. Legyen v sajátvektora A-nak 2 sajátértékkel és B-nek 3 sajátértékkel. Hová viszi $A + 2B - 3AB$ a $4v$ vektort?

    $-40v$

21. Hány hasonlósági osztályt alkotnak azok a komplex fölötti 3×3-as mátrixok, amelyeknek egyetlen sajátértéke az 1? A hasonlóságot tetszőleges bázisban értjük.

    3

22. Az $A \in \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^7)$ minimálpolinomja $(x^2 - x)^3$. Mik A rangjának lehetséges értékei?

    5, 6

23. Adjunk meg egy olyan **egység**vektort $\mathbb{C}^3$-ben, ami merőleges $(1, 2i, 3)^T \in \mathbb{C}^3$-re.

    $(1/\sqrt{5})(2i, 1, 0)^T$

24. Az $M \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ normális mátrixra $M(1, i)^T = (-i, 1)^T$. Mi lesz $M^*(1, i)^T$?

    $(i, -1)^T$

25. Mely $z \in \mathbb{C}$ értékekre lehet $x^2 - z$ egy unitér mátrix minimálpolinomja?

    $|z| = 1.$

26. Az $M \in \mathbb{R}^{5\times 5}$ egy ortogonális mátrix. Adjunk meg egy olyan számot, ami biztosan sajátértéke M^2-nek.

    1

27. Adjunk ellenpéldát az alábbira: „egy $M \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mátrix pontosan akkor diagonalizálható $\mathbb{R}$ fölött, ha szimmetrikus.”

    Pl. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

28. Az $M \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ mátrix minimálpolinomja $x^2 + 1$. A triviálisakkal együtt hány invariáns altere van?

    4

29. Legyen $W = \{f \in V : f(2) = 0\}$, ahol V az $\mathbb{R}[x]$ legfeljebb huszadfokú polinomjaiból és a nullapolinomból álló $\mathbb{R}$ fölötti vektortér. Mely $u \in \mathbb{R}$ számokra teljesül, hogy $V = W \oplus \langle x^2 - ux + 3u \rangle$?

    $u \neq -4$

30. Az $x^2 - cxy$ kvadratikus alak mely $c \in \mathbb{R}$ esetén indefinit?

    $c \neq 0$