

NÉV: _____

ELTE AZONOSÍTÓ: _____

II. rész (60 perc). Minden válaszáért 0 vagy 1 pont jár (negatív pontszám nincs). Indokolni nem kell. Aki elér legalább 10 pontot (és az I. részből is legalább hetet), annak a dolgozata már legalább elégséges; aki viszont nem éri el a 8 pontot, azé biztosan elégtelen. A többi esetben a vizsgajegy 17 ponttól legalább elégséges, 21 ponttól legalább közepes, és ekkor lehet jönni szóbelire, 24 ponttól legalább négyes. A szóbelin rontani nem lehet, a bizonyításokat kell tudni, és jelest csak a szóbelin lehet kapni.

11. Adjunk ellenpéldát a következő állításra: „Ha egy vektortér-axiómában nem szerepel kétféle skalár, akkor szerepel benne összeadás”.

Pl.

12. Adjunk meg egy olyan nem üres részhalmazt \mathbb{C} -ben, amely zárt a 45 fokos szögű komplex számokkal való szorzásra, de nem altér \mathbb{C} fölött.

Pl.

13. Melyik a legnagyobb n egész, amire teljesül a következő: „ n darab komplex elemű 2×2 -es mátrix biztosan nem generátorrendszer **komplex** fölött.”

14. Álljon X a legfeljebb harmadfokú valós együtthatós normált polinomokból. Mennyi X rangja \mathbb{R} fölött?

- 15–16. A következő levezetésben azt mutatjuk meg, hogy $\text{Hom}(V)$ -ben $(A + B)C = AC + BC$ tetszőleges A, B, C esetén. Minden egyes egyenlőségjelhez írjuk a mellette levő keretbe az S, T, P, N betűk egyikét aszerint, hogy annak a lépésnek mi az indoklása. A betűk jelentése:
- (S) Leképezések összegének definíciója.
 (T) Leképezés összetartása.
 (P) Leképezések szorzatának definíciója.
 (N) A fentiek közül egyik sem.

(Pontozás: 4 helyes válasz: 2 pont;
 2 v. 3 helyes válasz: 1 pont;
 egyébként: 0 pont.)

$$((A + B)C)(v) = \square$$

$$(A + B)(C(v)) = \square$$

$$A(C(v)) + B(C(v)) = \square$$

$$(AC)(v) + (BC)(v) = \square$$

$$(AC + BC)(v)$$

17. Ha $A \in \text{Hom}(\mathbb{R}^3)$ és $A^2 - 2A = 0$, akkor mik A determinánsának lehetséges értékei?

18. A valós fölötti $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ vektortéren az $M \mapsto M + M^*$ transzformációnak mennyi a rangja?

19. Az $M \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ nem invertálható mátrixnak sajátértéke az $1 - i$. Mi a minimálpolinomja?

20. Legyen v sajátvektora A -nak 2 sajátértékkel és B -nek 3 sajátértékkel. Hová viszi $A + 2B - 3AB$ a $4v$ vektort?
21. Hány hasonlósági osztályt alkotnak azok a komplex fölötti 3×3 -as mátrixok, amelyeknek egyetlen sajátértéke az 1? A hasonlóságot tetszőleges bázisban értjük.
22. Az $A \in \text{Hom}(\mathbb{C}^7)$ minimálpolinomja $(x^2 - x)^3$. Mik A rangjának lehetséges értékei?
23. Adjunk meg egy olyan **egységvektort** \mathbb{C}^3 -ben, ami merőleges $(1, 2i, 3)^T \in \mathbb{C}^3$ -re.
24. Az $M \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$ normális mátrixra $M(1, i)^T = (-i, 1)^T$. Mi lesz $M^*(1, i)^T$?
25. Mely $z \in \mathbb{C}$ értékekre lehet $x^2 - z$ egy unitér mátrix minimálpolinomja?
26. Az $M \in \mathbb{R}^{5 \times 5}$ egy ortogonális mátrix. Adjunk meg egy olyan számot, ami biztosan sajátértéke M^2 -nek.
27. Adjunk ellenpéldát az alábbira: „egy $M \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ mátrix pontosan akkor diagonalizálható \mathbb{R} fölött, ha szimmetrikus.”
28. Az $M \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$ mátrix minimálpolinomja $x^2 + 1$. A triviálisakkal együtt hány invariáns altere van?
29. Legyen $W = \{f \in V : f(2) = 0\}$, ahol V az $\mathbb{R}[x]$ legfeljebb huszadfokú polinomjaiból és a nullapolinomból álló \mathbb{R} fölötti vektortér. Mely $u \in \mathbb{R}$ számokra teljesül, hogy $V = W \oplus \langle x^2 - ux + 3u \rangle$?
30. Az $x^2 - cxy$ kvadratikus alak mely $c \in \mathbb{R}$ esetén indefinit?