*Mat. I. (BSc.)* **Algebra2: 3. vizsgadolgozat (normál), I. rész** *2022. jún. 16.*

NÉV: ______________________________ ELTE AZONOSÍTÓ: ______________

**I. rész (30 perc).** *Minden teljesen precíz és korrekt válaszért 1 pont jár, a többiért* 0. *Indokolni nem kell. Aki itt nem ér el legalább* 7 *pontot, annak a dolgozata elégtelen, és ekkor a második részt ki sem javítjuk.*

1. Legyen $V$ vektortér és $v_1, \ldots, v_n \in V$. Írjuk le képlettel, mit jelent az, hogy a $\langle v_1, \ldots, v_n \rangle$ generált altér a **legszűkebb** a $v_1, \ldots, v_n$ vektorokat tartalmazó alterek között. A generált altér elemeit megadó képletet nem kell leírni.

   Minden $W$ altérre $v_1, \ldots, v_n \in W \Rightarrow \langle v_1, \ldots, v_n \rangle \subseteq W$.

2. Írjuk föl azt a képletet, amivel a $v$ vektor $i$-edik koordinátáját a $b_1, \ldots, b_n$ **ortonormált** bázisban **komplex fölött,** skaláris szorzás segítségével ki lehet számítani.

   $\langle b_i, v \rangle$ (fontos a sorrend!)

3. Definiáljuk a $V$ vektortér $U$ és $W$ altereinek összegét **a halmazos jelöléssel.**

   $U + W = \{u + w \in V \,:\, u \in U \text{ és } w \in W\}$.

4. Mondjuk ki a dimenziótételt (felírva azt is, hogy a leképezés honnan hová képez, és az ezen vektorterekre vonatkozó feltételeket).

   Ha $A \in \mathrm{Hom}(V, W)$ és $\dim(V)$ véges, akkor $\dim \mathrm{Ker}(A) + \dim \mathrm{Im}(A) = \dim V$.

5. Mondjuk ki a lineáris leképezések előírhatósági tételét.

   Ha $b_1, \ldots, b_n$ bázis a $V$ vektortérben és $c_1, \ldots, c_n$ tetszőleges vektorok
   az ugyanazon test feletti $W$ vektortérben, akkor pontosan egy olyan
   $A : V \to W$ lineáris leképezés létezik, amelyre $A(b_i) = c_i$ minden $1 \leq i \leq n$ esetén.

6. Mit jelent az, hogy a Jordan-alak **egyértelmű?** A választ a **hasonlóság** fogalmát felhasználva adjuk meg.

Két $\mathbb{C}^{n\times n}$-beli mátrix akkor és csak akkor hasonló, ha Jordan-alakjuk a blokkok sorrendjétől eltekintve megegyezik. *Másképp:* Ha egy mátrix hasonló két Jordan-alakú mátrixhoz is, akkor ezek csak a blokkok sorrendjében térhetnek el.

7. Mondjuk ki a főtengelytételt, figyelve arra is, hogy milyen test fölötti mátrixokról beszélünk, és hogy milyen bázisról van szó.

Egy $n \times n$-es **valós** mátrix akkor és csak akkor diagonalizálható **ortonormált bázisban valós fölött,** ha szimmetrikus, azaz $M^T = M$.

8. Írjuk föl képlettel, mit jelent az, hogy egy transzformáció távolságtartó.

$\|A(v) - A(w)\| = \|v - w\|$ minden $v$ és $w$ vektorra.

9. Mondjuk ki az adjungált transzformációt a skaláris szorzat segítségével jellemző tételt.

Az $A$ és $B$ pontosan akkor adjungáltak, ha minden $v$, $w$ vektorra $\langle A(v), w\rangle = \langle v, B(w)\rangle$.

10. Mondjuk ki azt az állítást, amely a $V$ és $W$ alterek direkt összegének egy speciális bázisát adja meg.

Ha $b_1, \ldots, b_n$ bázis $V$-ben, és $b_{n+1}, \ldots, b_m$ bázis $W$-ben, akkor $b_1, \ldots, b_m$ bázis $V \oplus W$-ben.