NÉV: ______________________ ELTE AZONOSÍTÓ: __________

II. rész (60 perc). *Minden válaszért* 0 *vagy* 1 *pont jár (negatív pontszám nincs). Indokolni nem kell. Aki elér legalább* 10 *pontot (és az I. részből is legalább hetet), annak a dolgozata már legalább elégséges; aki viszont nem éri el a* 8 *pontot, azé biztosan elégtelen. A többi esetben a vizsgajegy 17 ponttól legalább elégséges, 21 ponttól legalább közepes, és ekkor lehet jönni szóbelire, 24 ponttól legalább négyes. A szóbelin rontani nem lehet, a bizonyításokat kell tudni, és jelest csak a szóbelin lehet kapni.*

11. Adjunk ellenpéldát a következő állításra: „Ha egy vektortér-axiómában csak egyféle skalár szerepel, akkor nem szerepel benne összeadás”.

    Pl. $\lambda(u+v) = \lambda u + \lambda v$.

12. Adjunk meg egy olyan nem üres részhalmazt $\mathbb{C}$-ben, amely zárt az összes tisztán képzetes komplex számmal való szorzásra, de nem altér $\mathbb{C}$ fölött.

    Pl. A valós számok és a tisztán képzetes számok együtt.

13. Melyik a legnagyobb n egész, amire teljesül a következő: „n darab komplex elemű 2×2-es mátrix biztosan független **valós** fölött.”

    0

14. Álljon X azokból a legfeljebb harmadfokú valós együtthatós polinomokból, melyeknek gyöke az $1+i$. Mennyi X rangja $\mathbb{R}$ fölött?

    2

15–16. A következő levezetésben azt mutatjuk meg, hogy $\mathrm{Hom}(V,V)$-ben $C(A+B) = CA + CB$ tetszőleges A, B, C esetén. Minden egyes egyenlőségjelhez írjuk a mellette levő keretbe az S, Z, P, E betűk egyikét aszerint, hogy annak a lépésnek mi az indoklása. A betűk jelentése:

(S) Leképezések összegének definíciója.
(Z) Leképezés összegtartása.
(P) Leképezések szorzatának definíciója.
(E) A fentiek közül egyik sem.

(*Pontozás:* 4 v. 5 helyes válasz: 2 pont; 2 v. 3 helyes válasz: 1 pont; egyébként: 0 pont.)

$$\big(C(A+B)\big)(v) = \quad \boxed{\text{P}}$$
$$C\big((A+B)(v)\big) = \quad \boxed{\text{S}}$$
$$C\big(A(v)+B(v)\big) = \quad \boxed{\text{Z}}$$
$$C\big(A(v)\big) + C\big(B(v)\big) = \quad \boxed{\text{P}}$$
$$(CA)(v) + (CB)(v) = \quad \boxed{\text{S}}$$
$$(CA+CB)(v)$$

17. Ha $A \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^4)$ és $A^2 + 2A + E = 0$, ahol E az egységmátrix, akkor mik A rangjának lehetséges értékei?

    4

18. A valós fölötti $\mathbb{R}^{2\times 2}$ vektortéren az $M \mapsto M + M^*$ transzformációnak mennyi a determinánsa?

    0

19. Az $M \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mátrixnak sajátértéke az $1+i$. Mi a minimálpolinomja?

$x^2 - 2x + 2$

20. Legyenek $M \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ sajátértékei 1, 5 és $f(x) = (x-3)^4$. Hányféle mátrix lehet $f(M)$?

Egyféle: $\begin{pmatrix} 16 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

21. Hány hasonlósági osztályt alkotnak azok a komplex fölötti 3×3-as mátrixok, amelyeknek sajátértékei 1 és -1 (és más nem)? A hasonlóságot tetszőleges bázisban értjük.

4

22. Az $A \in \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^7)$ minimálpolinomja $x^4 - x^3$. Mik A rangjának lehetséges értékei?

3, 4, 5, 6

23. Adjunk meg egy olyan **egység**vektort $\mathbb{C}^2$-ben, ami merőleges $(2i, 3)^T \in \mathbb{C}^2$-re.

$(1/\sqrt{13})(3, 2i)^T$

24. A $4 + u - 2v = 3\sqrt{4 + u^2 + v^2}$ egyenlőség mely u, v valós számokra teljesül?

$u = 1$ és $v = -2$

25. Adjunk ellenpéldát az alábbi állításra: „minden invertálható normális mátrix egy unitér mátrix komplex számszorosa.”

Pl. $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

26. Az $M \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ ortogonális mátrixnak $(1+i)/\sqrt{2} \in \mathbb{C}$ sajátértéke. Mennyi lehet a főátlóban álló elemek összege?

$\sqrt{2} \pm 1$

27. Egy 2×2-es valós szimmetrikus mátrixnak sajátvektora $(1,1)$ és $(c, c+2)$, és ezek különböző sajátértékhez tartoznak. Mik c lehetséges értékei?

$c = -1$

28. Az $M \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ mátrix minimálpolinomja $x + 1$. A triviálisakkal együtt hány invariáns altere van?

Végtelen sok.

29. Legyen $M = \begin{pmatrix} 1 & d \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. Mely $d \in \mathbb{C}$ számokra teljesül, hogy $\mathbb{C}^2$ nem áll elő két egydimenziós M-invariáns altér direkt összegeként?

$d = -1/2$

30. Adjunk ellenpéldát az alábbi állításra: „ha egy kétváltozós valós kvadratikus alak szimmetrikus mátrixának főátlójában minden elem pozitív, akkor Q pozitív definit”.

$x^2 - 100xy + y^2$