

NÉV: _____

ELTE AZONOSÍTÓ: _____

II. rész (60 perc). Minden válaszáért 0 vagy 1 pont jár (negatív pontszám nincs). Indokolni nem kell. Aki elér legalább 10 pontot (és az I. részből is legalább hetet), annak a dolgozata már legalább elégséges; aki viszont nem éri el a 8 pontot, azé biztosan elégtelen. A többi esetben a vizsgajegy 17 ponttól legalább elégséges, 21 ponttól legalább közepes, és ekkor lehet jönni szóbelire, 24 ponttól legalább négyes. A szóbelin rontani nem lehet, a bizonyításokat kell tudni, és jelest csak a szóbelin lehet kapni.

11. Adjunk ellenpéldát a következő állításra: „Ha egy vektortér-axiómában csak egyféle skalár szerepel, akkor nem szerepel benne összeadás”.

Pl.

12. Adjunk meg egy olyan nem üres részhalmazt \mathbb{C} -ben, amely zárt az összes tisztán képzetes komplex számmal való szorzásra, de nem altér \mathbb{C} fölött.

Pl.

13. Melyik a legnagyobb n egész, amire teljesül a következő: „ n darab komplex elemű 2×2 -es mátrix biztosan független valós fölött.”

14. Álljon X azokból a legfeljebb harmadfokú valós együtthatós polinomokból, melyeknek gyöke az $1 + i$. Mennyi X rangja \mathbb{R} fölött?

- 15–16. A következő levezetésben azt mutatjuk meg, hogy $\text{Hom}(V, V)$ -ben $C(A + B) = CA + CB$ tetszőleges A, B, C esetén. Minden egyes egyenlőségjelhez írjuk a mellette levő keretbe az S, Z, P, E betűk egyikét aszerint, hogy annak a lépésnek mi az indoklása. A betűk jelentése:

(S) Leképezések összegének definíciója.

(Z) Leképezés összetartása.

(P) Leképezések szorzatának definíciója.

(E) A fentiek közül egyik sem.

(Pontozás: 4 v. 5 helyes válasz: 2 pont;
2 v. 3 helyes válasz: 1 pont;
egyébként: 0 pont.)

$$(C(A + B))(v) = \square$$

$$C((A + B)(v)) = \square$$

$$C(A(v) + B(v)) = \square$$

$$C(A(v)) + C(B(v)) = \square$$

$$(CA)(v) + (CB)(v) = \square$$

$$(CA + CB)(v)$$

17. Ha $A \in \text{Hom}(\mathbb{R}^4)$ és $A^2 + 2A + E = 0$, ahol E az egység-mátrix, akkor mik A rangjának lehetséges értékei?

18. A valós fölötti $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ vektortéren az $M \mapsto M + M^*$ transzformációnak mennyi a determinánusa?

19. Az $M \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ mátrixnak sajátértéke az $1 + i$. Mi a minimálpolinomja?
20. Legyenek $M \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$ sajátértékei 1, 5 és $f(x) = (x - 3)^4$. Hányféle mátrix lehet $f(M)$?
21. Hány hasonlósági osztályt alkotnak azok a komplex fölötti 3×3 -as mátrixok, amelyeknek sajátértékei 1 és -1 (és más nem)? A hasonlóságot tetszőleges bázisban értjük.
22. Az $A \in \text{Hom}(\mathbb{C}^7)$ minimálpolinomja $x^4 - x^3$. Mik A rangjának lehetséges értékei?
23. Adjunk meg egy olyan **egységvektort** \mathbb{C}^2 -ben, ami merőleges $(2i, 3)^T \in \mathbb{C}^2$ -re.
24. A $4 + u - 2v = 3\sqrt{4 + u^2 + v^2}$ egyenlőség mely u, v valós számokra teljesül?
25. Adjunk ellenpéldát az alábbi állításra: „minden invertálható normális mátrix egy unitér mátrix komplex számszorosa.”
26. Az $M \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ortogonális mátrixnak $(1 + i)/\sqrt{2} \in \mathbb{C}$ sajátértéke. Mennyi lehet a főátlóban álló elemek összege?
27. Egy 2×2 -es valós szimmetrikus mátrixnak sajátvektora $(1, 1)$ és $(c, c+2)$, és ezek különböző sajátértékhez tartoznak. Mik c lehetséges értékei?
28. Az $M \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$ mátrix minimálpolinomja $x + 1$. A triviálisakkal együtt hány invariáns altere van?
29. Legyen $M = \begin{pmatrix} 1 & d \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. Mely $d \in \mathbb{C}$ számokra teljesül, hogy \mathbb{C}^2 nem áll elő két egydimenziós M -invariáns altér direkt összegeként?
30. Adjunk ellenpéldát az alábbi állításra: „ha egy kétváltozós valós kvadratikus alak szimmetrikus mátrixának főátlójában minden elem pozitív, akkor Q pozitív definit”.