Mat. I. (BSc.) **Algebra2: 2. vizsgadolgozat (normál), I. rész** *2022. jún. 2.*

NÉV: ______________________ ELTE AZONOSÍTÓ: __________

I. rész (30 perc). *Minden teljesen precíz és korrekt válaszért 1 pont jár, a többiért* 0*. Indokolni nem kell. Aki itt nem ér el legalább* 7 *pontot, annak a dolgozata elégtelen, és ekkor a második részt ki sem javítjuk.*

1. Legyen V vektortér a T test fölött és $v_1, \ldots, v_n \in V$. Írjuk föl $\langle v_1, \ldots, v_n \rangle$ definícióját **a halmazos jelöléssel**, figyelve arra, hogy mik a futó változók, és mik nem.

$\langle v_1, \ldots, v_n \rangle = \{\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n \,:\, \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in T\}$

2. Írjuk föl azt a képletet, amely az $A \in \mathrm{Hom}(V, W)$ és $B \in \mathrm{Hom}(U, V)$ lineáris leképezések szorzatának mátrixát adja meg, kiírva azt is, hogy mely bázisokban vesszük ezeket a mátrixokat.

Ha $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ bázis rendre U, V, W-ben, akkor $[AB]_{\mathbf{c}/\mathbf{a}} = [A]_{\mathbf{c}/\mathbf{b}}[B]_{\mathbf{b}/\mathbf{a}}$.

3. Mondjuk ki az altér dimenziójáról szóló tételt véges dimenziós V vektortérre, figyelve arra is, hogy mikor állhat egyenlőség.

Ha W altere V-nek, akkor $\dim W \leq \dim V$, és egyenlőség csak $V = W$ esetén lehetséges.
Elfogadjuk: Ha W valódi altér V-ben, akkor $\dim W < \dim V$.

4. Írjuk föl képlettel, mit jelent az, hogy egy transzformáció tartja a λ skalárral szorzást.

$A(\lambda v) = \lambda A(v)$ minden v vektorra.

5. Mondjuk ki a lineáris leképezések előírhatósági tételét.

Ha $b_1, \ldots, b_n$ bázis a V vektortérben és $c_1, \ldots, c_n$ tetszőleges vektorok az ugyanazon test feletti W vektortérben, akkor pontosan egy olyan $A : V \to W$ lineáris leképezés létezik, amelyre $A(b_i) = c_i$ minden $1 \leq i \leq n$ esetén.

6. Mit jelent az, hogy két négyzetes mátrix hasonló?

> Ugyanazon lineáris transzformáció mátrixai (csak esetleg más bázisban).

7. Mondjuk ki a Cayley–Hamilton-tételt az $n \times n$-es M mátrixra.

> M gyöke a karakterisztikus polinomjának: $k_M(M) = 0$.
> **Vagy:** M minimálpolinomja osztója a karakterisztikus polinomjának: $m_M \mid k_M$.

8. Írjuk föl képlettel, mit jelent az, hogy egy transzformáció tartja a skaláris szorzatot.

> $\langle A(v), A(w)\rangle = \langle v, w\rangle$ minden v és w vektorra.

9. Mondjuk ki az adjungált transzformációt a skaláris szorzat segítségével jellemző tételt.

> Az A és B pontosan akkor adjungáltak, ha minden v, w vektorra $\langle A(v), w\rangle = \langle v, B(w)\rangle$.

10. Mondjuk ki azt az állítást, amely $A \in \mathrm{Hom}(V)$ esetében kapcsolatot létesít A és A^* invariáns alterei között.

> Ha a W altér A-invariáns, akkor a $W^\perp$ ortogonális kiegészítő altér A^*-invariáns.