NÉV: ______________________ ELTE AZONOSÍTÓ: __________

II. rész (60 perc). *Minden válaszért* 0 *vagy* 1 *pont jár (negatív pontszám nincs). Indokolni nem kell. Aki elér legalább* 10 *pontot (és az I. részből is legalább hetet), annak a dolgozata már legalább elégséges; aki viszont nem éri el a* 8 *pontot, azé biztosan elégtelen. A többi esetben a vizsgajegy 17 ponttól legalább elégséges, 21 ponttól legalább közepes, és ekkor lehet jönni szóbelire, 24 ponttól legalább négyes. A szóbelin rontani nem lehet, a bizonyításokat kell tudni, és jelest csak a szóbelin lehet kapni.*

11. Adjunk ellenpéldát a következő állításra: „Ha egy vektortér-axiómában kétféle skalár is szerepel, akkor szerepel benne összeadás”.

    Pl. $\lambda(\mu v) = (\lambda\mu)v$.

12. Adjunk meg egy olyan részhalmazt $\mathbb{C}$-ben, amely zárt az összes komplex számmal való szorzásra, de nem altér $\mathbb{C}$ fölött.

    Pl. Az üres halmaz (és más nem).

13. Melyik a legkisebb $n > 0$ egész, amire teljesül a következő: „n darab komplex elemű 2×2-es mátrix biztosan összefüggő **valós** fölött.”

    9

14. Álljon X azokból a pontosan harmadfokú komplex együtthatós polinomokból, amelyek minden együtthatója különböző. Mennyi X rangja $\mathbb{C}$ fölött?

    4

15–16. A következő levezetésben azt mutatjuk meg, hogy $\mathrm{Hom}(V)$-ben a skalárral való szorzásra teljesül, hogy $(\lambda A)B = A(\lambda B)$ minden $\lambda \in T$ testelem és A, B lineáris leképezés esetén. Minden egyes egyenlőségjelhez írjuk a mellette levő keretbe a P, A, B, L, N betűk egyikét aszerint, hogy annak a lépésnek mi az indoklása. A betűk jelentése:
(P) Leképezések szorzatának definíciója.
(A) A skalárszoros-tartó.
(B) B skalárszoros-tartó.
(L) Leképezés skalárszorosának definíciója.
(N) A fentiek közül egyik sem.

Pontozás: 4 v. 5 helyes válasz: 2 pont; 2 v. 3 helyes válasz: 1 pont; egyébként: 0 pont.

$\big((\lambda A)B\big)(v) =$ P

$(\lambda A)\big(B(v)\big) =$ L

$\lambda\big(A(B(v))\big) =$ A

$A\big(\lambda(B(v))\big) =$ L

$A\big((\lambda B)(v)\big) =$ P

$\big(A(\lambda B)\big)(v)$

17. Ha $A \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^4)$ és $A^2 = 0$, akkor mik A rangjának lehetséges értékei?

    0, 1, 2

18. A **valós** fölötti $\mathbb{C}^{2\times 2}$ vektortéren az $M \mapsto 2M^*$ transzformációnak mennyi a determinánsa?

2^8

19. Az $M \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mátrixnak sajátértéke az $1+i$. Mennyi a determinánsa?

2

20. Ha v sajátvektora A-nak i sajátértékkel és B-nek 3 sajátértékkel, továbbá $f(x) = x^2+2i$, akkor mennyi $\big(f(A-B)\big)(v)$?

$(8-4i)v$

21. Hány hasonlósági osztályt alkotnak az origót fixáló irányítástartó egybevágósági transzformációk a síkon? (A hasonlóságot tetszőleges bázisban értjük.)

végtelen sokat.

22. Az $A \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^4)$ minimálpolinomja $x^4 - x^2$. Mik A rangjának lehetséges értékei?

3

23. Mely $z \in \mathbb{C}$ esetén lesz $\langle (i,2), (z,-i)\rangle = 4i$?

$z = -6$

24. Ha $a^2+b^2 = 1$, $c^2+d^2 = 4$ és $(a+c)^2+(b+d)^2 = 9$, ahol $a,b,c,d \in \mathbb{R}$, akkor mennyi lehet $ad-bc$?

0

25. Egy $A \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^4)$ szimmetrikus mátrix minimálpolinomja $x^2 - c$. Mik c lehetséges értékei?

$c > 0$

26. Az $M \in \mathbb{C}^{5\times 5}$ normális mátrix, melynek karakterisztikus polinomja $-x^5$. Mi a minimálpolinomja?

x

27. Bontsuk föl a $\begin{pmatrix} 2i & 0 \\ 0 & 1-i \end{pmatrix}$ mátrixot egy önadjungált és egy unitér mátrix szorzatára.

$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & \frac{1-i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

28. Az $M \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ mátrix minimálpolinomja x^2. A triviálisakkal együtt hány invariáns altere van?

3

29. A $\big\langle (b,1)^T \big\rangle + \big\langle (4,b)^T \big\rangle$ összeg mely b számok esetén lesz direkt összeg?

$b \neq \pm 2$

30. Egy valós kvadratikus alak a $(2,4)^T$ vektoron a 8 értéket veszi fel. Milyen értéket vesz fel a $(-1,-2)^T$ vektoron?

2