

NÉV: _____

ELTE AZONOSÍTÓ: _____

II. rész (60 perc). Minden válaszáért 0 vagy 1 pont jár (negatív pontszám nincs). Indokolni nem kell. Aki elér legalább 10 pontot (és az I. részből is legalább hetet), annak a dolgozata már legalább elégséges; aki viszont nem éri el a 8 pontot, azé biztosan elégtelen. A többi esetben a vizsgajegy 17 ponttól legalább elégséges, 21 ponttól legalább közepes, és ekkor lehet jönni szóbelire, 24 ponttól legalább négyes. A szóbelin rontani nem lehet, a bizonyításokat kell tudni, és jelest csak a szóbelin lehet kapni.

11. Adjunk ellenpéldát a következő állításra: „Ha egy vektortér-axiómában kétféle skalár is szerepel, akkor szerepel benne összeadás”.

Pl.

12. Adjunk meg egy olyan részhalmazt \mathbb{C} -ben, amely zárt az összes komplex számmal való szorzásra, de nem alter \mathbb{C} fölött.

Pl.

13. Melyik a legkisebb $n > 0$ egész, amire teljesül a következő: „ n darab komplex elemű 2×2 -es mátrix biztosan összefüggő valós fölött.”

14. Álljon X azokból a pontosan harmadfokú komplex együtt-hatós polinomokból, amelyek minden együttthatója különböző. Mennyi X rangja \mathbb{C} fölött?

- 15–16. A következő levezetésben azt mutatjuk meg, hogy $\text{Hom}(V)$ -ben a skalárral való szorzásra teljesül, hogy $(\lambda A)B = A(\lambda B)$ minden $\lambda \in T$ testelem és A, B lineáris leképezés esetén. Minden egyes egyenlőségjelhez írjuk a mellette levő keretbe a P, A, B, L, N betűk egyikét aszerint, hogy annak a lépésnek mi az indoklása. A betűk jelentése:

(P) Leképezések szorzatának definíciója.

(A) A skalárszoros-tartó.(B) B skalárszoros-tartó.

(L) Leképezés skalárszorosának definíciója.

(N) A fentiek közül egyik sem.

(Pontozás: 4 v. 5 helyes válasz: 2 pont;
2 v. 3 helyes válasz: 1 pont;
egyébként: 0 pont.)

$$((\lambda A)B)(v) = \square$$

$$(\lambda A)(B(v)) = \square$$

$$\lambda(A(B(v))) = \square$$

$$A(\lambda(B(v))) = \square$$

$$A((\lambda B)(v)) = \square$$

$$(A(\lambda B))(v)$$

17. Ha $A \in \text{Hom}(\mathbb{R}^4)$ és $A^2 = 0$, akkor mik A rangjának lehetséges értékei?

18. A **valós** fölötti $\mathbb{C}^{2 \times 2}$ vektortéren az $M \mapsto 2M^*$ transzformációnak mennyi a determinánusa?
19. Az $M \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ mátrixnak sajátértéke az $1 + i$. Mennyi a determinánusa?
20. Ha v sajátvektora A -nak i sajátértékkel és B -nek 3 sajátértékkel, továbbá $f(x) = x^2 + 2i$, akkor mennyi $(f(A-B))(v)$?
21. Hány hasonlósági osztályt alkotnak az origót fixáló irányítástartó egybevágósági transzformációk a síkon? (A hasonlóságot tetszőleges bázisban értjük.)
22. Az $A \in \text{Hom}(\mathbb{R}^4)$ minimálpolinomja $x^4 - x^2$. Mik A rangjának lehetséges értékei?
23. Mely $z \in \mathbb{C}$ esetén lesz $\langle (i, 2), (z, -i) \rangle = 4i$?
24. Ha $a^2 + b^2 = 1$, $c^2 + d^2 = 4$ és $(a + c)^2 + (b + d)^2 = 9$, ahol $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, akkor mennyi lehet $ad - bc$?
25. Egy $A \in \text{Hom}(\mathbb{R}^4)$ szimmetrikus mátrix minimálpolinomja $x^2 - c$. Mik c lehetséges értékei?
26. Az $M \in \mathbb{C}^{5 \times 5}$ normális mátrix, melynek karakterisztikus polinomja $-x^5$. Mi a minimálpolinomja?
27. Bontsuk föl a $\begin{pmatrix} 2i & 0 \\ 0 & 1 - i \end{pmatrix}$ mátrixot egy önadjungált és egy unitér mátrix szorzatára.
28. Az $M \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$ mátrix minimálpolinomja x^2 . A triviálisakkal együtt hány invariáns altere van?
29. A $\langle (b, 1)^T \rangle + \langle (4, b)^T \rangle$ összeg mely b számok esetén lesz direkt összeg?
30. Egy valós kvadratikus alak a $(2, 4)^T$ vektoron a 8 értéket veszi fel. Milyen értéket vesz fel a $(-1, -2)^T$ vektoron?