NÉV: ______________________ ELTE AZONOSÍTÓ: ____________

I. rész (30 perc). *Minden teljesen precíz és korrekt válaszért 1 pont jár, a többiért* 0. *Indokolni nem kell. Aki itt nem ér el legalább* 7 *pontot, annak a dolgozata elégtelen, és ekkor a második részt ki sem javítjuk.*

1. Definiáljuk, mit jelent az, hogy a $v_1, \ldots, v_n$ vektorok generátorrendszert alkotnak a T test fölötti V vektortérben. **Mindkét kvantort expliciten írjuk ki a megfogalmazásban,** és ne használjuk a generált altér fogalmát.

   Minden $v \in V$-hez **létezik** $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in T$, melyre $v = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n$.

2. Definiáljuk a jobb oldali nullosztó fogalmát $\mathrm{Hom}(V)$-ben.

   $A \in \mathrm{Hom}(V)$ jobb oldali nullosztó, ha $A \neq 0$, és van olyan $0 \neq B \in \mathrm{Hom}(V)$, melyre $BA = 0$.

3. Mondjuk ki a $\mathrm{Hom}(U, V)$ dimenzióját megadó képletet.

   $\dim \mathrm{Hom}(U, V) = \dim(U) \dim(V)$.

4. Definiáljuk **halmaz-jelöléssel** az $A \in \mathrm{Hom}(U, V)$ lineáris leképezés magterét.

   $\mathrm{Ker}(A) = \{u \in U \,:\, A(u) = 0_V.\}$

5. Mondjuk ki a dimenziótételt (felírva azt is, hogy a leképezés honnan hová képez, és az ezen vektorterekre vonatkozó feltételeket).

   Ha $A \in \mathrm{Hom}(U, V)$ és $\dim(U)$ véges, akkor $\dim \mathrm{Ker}(A) + \dim \mathrm{Im}(A) = \dim U$.

6. Ha $b_1, \ldots, b_n$ ONB, és az A lineáris transzformáció mátrixa ebben a bázisban M, akkor hogyan írható fel M-ben az i-edik sor j-edik eleme skaláris szorzat segítségével?

$\langle b_i, A(b_j) \rangle$.

7. Hogyan kapcsolódik az A lineáris transzformáció m_A minimálpolinomja azokhoz az f polinomokhoz, melyeknek A gyöke?

$f(A) = 0 \Longleftrightarrow m_A \mid f$, vagyis ezek az f polinomok a minimálpolinom többszörösei.

8. Írjuk föl képlettel, mit jelent az, hogy egy transzformáció tartja a skaláris szorzatot.

$\langle A(v), A(w) \rangle = \langle v, w \rangle$ minden v és w vektorra.

9. Definiáljuk a V és W alterek direkt összegének fogalmát. Mi ennek a jele?

A $V + W$ összeget direkt összegnek nevezzük, ha $V \cap W = \{0\}$, jele $V \oplus W$.

10. Mondjuk ki azt az állítást, amely $A \in \mathrm{Hom}(V)$ esetében kapcsolatot létesít A és A^* invariáns alterei között.

Ha a W altér A-invariáns, akkor a $W^\perp$ ortogonális kiegészítő altér A^*-invariáns.