NÉV: ______________________ ELTE AZONOSÍTÓ: ____________

II. rész (60 perc). *Minden válaszért* 0 *vagy* 1 *pont jár (negatív pontszám nincs). Indokolni nem kell. Aki elér legalább* 10 *pontot (és az I. részből is legalább hetet), annak a dolgozata már legalább elégséges; aki viszont nem éri el a* 8 *pontot, azé biztosan elégtelen. A többi esetben a vizsgajegy 17 ponttól legalább elégséges, 21 ponttól legalább közepes, és ekkor lehet jönni szóbelire, 24 ponttól legalább négyes. A szóbelin rontani nem lehet, a bizonyításokat kell tudni, és jelest csak a szóbelin lehet kapni.*

11. Adjunk ellenpéldát a következő állításra: „Ha egy vektortéraxiómában kétféle skalár is szerepel, akkor nem szerepel benne összeadás”.

Pl. $(\lambda+\mu)v = \lambda v + \mu v.$

12. Adjunk meg egy olyan részhalmazt $\mathbb{C}$-ben, amely zárt az 1 abszolút értékű komplex számokkal való szorzásra, tartalmazza a nullát, de nem altér $\mathbb{C}$ fölött.

Pl. A komplex egységkörhöz hozzávesszük a nullát.

13. Milyen c-re igaz $\mathbb{R}$ fölött, hogy ha u, v, w független, akkor $u+cv, v+cw, w+cu$ is az?

$c \neq -1.$

14. Álljon X azokból a pontosan harmadfokú komplex együtthatós polinomokból, amelyek minden együtthatója egyenlő. Mennyi X rangja $\mathbb{R}$ fölött?

2

15–16. A következő levezetésben azt igazoljuk, hogy lineáris leképezések összege skalárszorostartó. Minden egyes egyenlőségjelhez írjuk a mellette levő keretbe az O, L, D, S, X betűk egyikét aszerint, hogy annak a lépésnek mi az indoklása. A betűk jelentése:

(S) A, illetve B összegtartó.
(L) A, illetve B skalárszorostartó.
(D) Leképezés skalárszorosának definíciója.
(O) Leképezések összegének definíciója.
(X) A fentiek közül egyik sem.

Pontozás: 4 v. 3 helyes válasz: 2 pont; 2 helyes válasz: 1 pont; egyébként: 0 pont.

$$(A+B)(\lambda v) = \quad \boxed{\text{O}}$$
$$A(\lambda v) + B(\lambda v) = \quad \boxed{\text{L}}$$
$$\lambda\big(A(v)\big) + \lambda\big(B(v)\big) = \quad \boxed{\text{X}}$$
$$\lambda\big(A(v) + B(v)\big) = \quad \boxed{\text{O}}$$
$$\lambda\big((A+B)(v)\big)$$

17. Mennyi a rangja annak a lineáris transzformációnak, amely az $M \in \mathbb{R}^{5\times 5}$ mátrixhoz az $M - M^T$-at rendeli?

10

18. Adjunk példát, ami mutatja, hogy a komplex négyzetes mátrixok $\mathbb{C}$ fölötti vektorterén az $M \mapsto M^*$ nem lineáris leképezés.

Pl. $(iE)^* = -iE \neq iE.$

19. Az $M \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mátrix determinánsa d. A d mely értékeire lesznek M sajátértékei biztosan valósak?

    $d \leq 0.$

20. Az A minimálpolinomja $x^2 + x + 1$. Mennyi $A^6(2v)$?

    $2v$

21. Hány hasonlósági osztályt alkotnak az origót fixáló irányításváltó egybevágósági transzformációk a síkon? (A hasonlóságot tetszőleges bázisban értjük.)

    1

22. Az $A \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^4)$ minimálpolinomja $x^4 - x^3$. Mi lesz A^2 minimálpolinomja?

    $x^3 - x^2$

23. Egy $A \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^4)$ ortogonális mátrix minimálpolinomja $x^3 - c$. Mik c lehetséges értékei?

    ± 1

24. Melyik a legkisebb $n > 0$, melyre igaz, hogy van két olyan $n \times n$-es komplex mátrix, amelyek nem hasonlók, noha a minimálpolinomjuk és a karakterisztikus polinomjuk is egyenlő, és legalább három különböző sajátértékük van?

    6

25. Adjunk ellenpéldát az alábbi állításra: „az u és v vektorokra felírt háromszögegyenlőtlenségben akkor és csak akkor áll egyenlőség, ha a két vektor párhuzamos.”

    Pl. $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}$ $(u = -v \neq 0)$

26. Adjunk példát olyan $M \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ normális, valós fölött nem diagonalizálható mátrixra, melynek nyoma 2.

    Pl. $\begin{pmatrix}1 & -\sqrt{3}\\ \sqrt{3} & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$

27. Adjunk meg egy olyan szimmetrikus valós mátrixot, amelynek négyzete $\begin{pmatrix}5 & 4\\ 4 & 5\end{pmatrix}$.

    Pl. $\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$

28. Az $(x, y, u, v) \mapsto (-y, x, -v, u)$ leképezésnek adjuk meg egy kétdimenziós invariáns alterét.

    Pl. Az $(x, y, 0, 0)$ alakú vektorok.

29. A tér origón átmenő S síkjának $(1, 2, 3)^T$ és $(2, 3, 4)^T$ is eleme. Adjuk meg $S^\perp$ egy generátorát.

    Pl. $(-1, 2, -1)^T$

30. Adjunk meg egy olyan valós szimmetrikus mátrixot, amelynek minden eleme pozitív, és a hozzá tartozó kvadratikus alak mégsem pozitív definit.

    Pl. $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$