

Bsc algebra2 gyakorlat

Nyolcadik feladatsor (8. és 9. prezentáció)

$B = A^*$ pontosan akkor, ha minden u, v vektorra $\langle Au, v \rangle = \langle u, Bv \rangle$. Az A^* mátrixa (ortonormált bázisban) az A mátrixának transzponáltja \mathbb{R} felett, és az A mátrixának transzponált konjugáltja \mathbb{C} felett. Az euklideszi terek speciális transzformációinak elnevezése:

	ℝ	ℂ
$A^* = A$	szimmetrikus	önadjungált
$A^* = A^{-1}$	ortogonális	unitér
$AA^* = A^*A$		normális

Egy transzformáció pontosan akkor unitér (ortogonális), ha távolságtartó, azaz ha skalárszorozattartó, azaz ha ONB-t ONB-be visz. Egy \mathbb{C} feletti transzformáció pontosan akkor diagonalizálható unitér transzformációval (azaz alkalmas ONB-ben), ha normális. Egy \mathbb{R} feletti transzformáció pontosan akkor diagonalizálható ortogonális transzformációval (azaz alkalmas ONB-ben), ha szimmetrikus (ez a *főtengeletétel*). Unitér transzformáció sajátértékei egységnyi abszolút értékűek. Önadjungált transzformáció sajátértékei valósak.

1. Adjuk meg a síkon a tükrözések, forgatások, merőleges vetítések adjungáltját. Melyek lesznek szimmetrikusak, illetve ortogonálisak?

2. A \mathbb{C}^4 alábbi transzformációi közül melyek normálisak, önadjungáltak, unitérek?

$$\begin{aligned}
 A \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}, & B \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} u_4 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}, & C \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} u_1 \\ u_1 \\ u_1 \\ u_1 \end{bmatrix}, \\
 D \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} u_1 + u_2 + u_3 + u_4 \\ u_1 + u_2 + u_3 + u_4 \\ u_1 + u_2 + u_3 + u_4 \\ u_1 + u_2 + u_3 + u_4 \end{bmatrix}, & E \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} u_1 - u_2 \\ u_2 - u_3 \\ u_3 - u_4 \\ u_4 - u_1 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

3. Tekintsük \mathbb{R}^4 -en az előző feladat B és D transzformációit, valamint az alábbiakat:

$$F \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_4 \\ u_3 \\ u_2 \\ u_1 \end{bmatrix}, \quad G \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (u_1 - u_2 + u_3 - u_4)/2 \\ (u_1 - u_2 - u_3 + u_4)/2 \\ (u_1 + u_2 + u_3 + u_4)/2 \\ (u_1 + u_2 - u_3 - u_4)/2 \end{bmatrix}, \quad H \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 + u_2 \\ u_1 - u_2 \\ u_3 + u_4 \\ u_3 - u_4 \end{bmatrix}.$$

Melyek szimmetrikusak, illetve ortogonálisak? A szimmetrikusokhoz adjunk meg ortonormált sajátbázist, az ortogonálisokhoz pedig olyan bázist, amelyben a mátrixra az előadáson szerepelt tételnek megfelelő, forgatásokat és ± 1 -et tartalmazó blokkokra bomlik.

4. (**) Bizonyítsuk be az alábbiakat.

- (1) Ha $Au = \lambda v$ és $A^*w = \mu w$, akkor $\bar{\lambda} = \mu$ vagy $v \perp w$.
- (2) $\text{Ker } A^* = (\text{Im } A)^\perp$ és $\text{Im } A^* = (\text{Ker } A)^\perp$.
- (3) $AA^* = 0 \implies A = 0$.
- (4) $A^*B = 0 \implies \text{Im}(A) + \text{Im}(B) = \text{Im } A \oplus \text{Im } B$.
- (5) $A^*B = BA^* = 0 \implies \text{Im}(A + B) = \text{Im } A \oplus \text{Im } B$.

5. (**) Igazoljuk, hogy ha A és B önadjungált, akkor AB pontosan akkor önadjungált, ha $AB = BA$.
6. (**) Mutassuk meg, hogy egy normális transzformáció sajátalterei páronként merőlegesek. Igaz-e a megfordítás?
7. (**) Igaz-e, hogy ha két normális transzformáció felcserélhető, akkor megegyeznek a sajátvektoraik? Igaz-e a megfordítás?
8. (**) Mutassuk meg, hogy az A transzformáció akkor és csak akkor normális, ha tetszőleges v vektorra $\|Av\| = \|A^*v\|$ teljesül.
9. (**) Mutassuk meg, hogy egy transzformáció akkor és csak akkor merőlegességtartó, ha egy unitér (illetve ortogonális) transzformáció skalárszorosa.
10. (**) Bizonyítsuk be, hogy ha A ortogonális és szimmetrikus, akkor A^2 az identitás. Megfordítható-e ez az állítás?
11. (**) Igazoljuk, hogy A akkor és csak akkor normális, ha A^* polinomja A -nak.
12. (**) Határozzuk meg a valós euklideszi síkon az összes normális transzformációt.
13. (**) Igazoljuk, hogy minden \mathbb{C} feletti lineáris transzformáció felírható egy unitér és egy önadjungált transzformáció szorzataként, és hogy egy transzformáció pontosan akkor normális, ha felírható egy unitér és egy önadjungált transzformáció szorzataként, melyek felcserélhetőek.
-
14. (*) Legyen T a sík egy transzformációja, ami nem nyújtás. Igazoljuk, hogy ha T diagonalizálható, akkor négy invariáns altere van; ha nincs valós sajátértéke, akkor kettő; különben pedig három. Adjunk meg a térben egy olyan lineáris transzformációt, melynek van olyan kétdimenziós invariáns altere, ami nem sajátaltér.
15. (*) Mutassuk meg, hogy A minden sajátalterének minden altere, továbbá $\text{Im}(A)$ és $\text{Ker}(A)$ is A -invariáns altér.
16. (*) Legyen A a deriválás a legfeljebb harmadfokú polinomok terén. Határozzuk meg A invariáns altereit.
17. (*) Határozzuk meg egy 4×4 -es Jordan-blokk invariáns altereit. Függ-e a válasz attól, hogy mi a blokkban szereplő sajátérték?
18. (*) Milyen kapcsolatban állnak A és A^* karakterisztikus polinomja, minimálpolinomja, sajátértékei, sajátalterei, invariáns alterei?
19. (*) Melyek azok a transzformációk, melyekre minden altér invariáns?
20. (*) Mutassuk meg, hogy ha $AB = BA$, akkor A minden sajátaltere, továbbá $\text{Im}(A)$ és $\text{Ker}(A)$ is B -invariáns altér.
-
21. (**) Jelölje $J_{\lambda,k}$ a $k \times k$ -as, λ sajátértékű Jordan-blokkot.
- (1) Melyek azok a $k \times k$ -as mátrixok, amelyek felcserélhetőek $J_{\lambda,k}$ -val?
 - (2) Tegyük föl, hogy az $M \in \mathbb{C}^{k \times k}$ mátrix Jordan-normálalakja egyetlen blokkból áll. Igazoljuk, hogy az M -mel felcserélhető mátrixok halmaza $\{p(M) \mid p \in \mathbb{C}[x]\}$.
 - (3) Igazoljuk a fenti állítás megfelelőjét abban az általánosabb esetben, amikor M minden sajátértéke csak egy Jordan-blokkban fordul elő.
 - (4) És általában $\{A \in \mathbb{C}^{k \times k} \mid AM = MA\} = ?$