Bsc algebra2 gyakorlat

Ötödik feladatsor (5. és 6. prezentáció)

1. Határozzuk meg a 4. feladatsor első feladatában szereplő mátrixok és transzformációk; egy általános diagonális mátrix; valamint az alábbi mátrixok minimálpolinomját, rangját és Jordan-alakját. Az utolsó sor mátrixai közül melyek hasonlók?

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -3 & -4 & 1 \\ 6 & 9 & -2 \\ 15 & 24 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

2. Melyek azok az A lineáris transzformációk a síkon, melyekre $m_A(x)$ elsőfokú, illetve melyekre $m_A(x) \neq k_A(x)$? Hogyan látszik a minimálpolinomról, hogy a transzformációnak létezik inverze? Hogyan olvasható le a rang a Jordan-alakról?

3. Van-e olyan mátrix, amelynek a karakterisztikus polinomja $x^4 - x^2$ és a minimálpolinomja (a) $x^2 - x$; (b) $x^3 - x$; (c) $x^4 - x^2$?

4. Mutassuk meg, hogy ha $M \in \mathbb{C}^{n \times n}$ és $\exists k M^k = E$, akkor M diagonalizálható.

5. ***(*)*** Igazoljuk, hogy egy $\mathbb{Q}^{n \times n}$-beli mátrix minimálpolinomja ugyanaz $\mathbb{Q}$ és $\mathbb{C}$ felett.

6. Oldjuk meg $\mathbb{Q}^{2 \times 2}$-ben az $X^4 = 2X$ egyenletet. Igazoljuk, hogy ha $M \in \mathbb{Q}^{2 \times 2}$, akkor $M^{1640} = 0 \implies M^2 = 0$. Igaz ez $\mathbb{Q}^{3 \times 3}$-ban is?

7. ***(*)*** Legyen M egy $n \times n$-es nilpotens mátrix (azaz $\exists k M^k = 0$). Igazoljuk, hogy $M^n = 0$. Mutassuk meg, hogy egy komplex elemű négyzetes mátrix akkor és csak akkor nilpotens, ha minden hatványának nulla a nyoma. Az első hány hatványra kell ezt feltenni?

8. Igazoljuk, hogy ha M invertálható mátrix, akkor M^{-1} polinomja M-nek.

---

9. Igazoljuk, hogy a Gauss-elimináció elvégzése után kapott mátrix sorrangja és determinánsrangja is megegyezik a vezéregyesek számával.

10. Bizonyítsuk be, hogy ha A és B lineáris leképzések, melyekre $A + B$ értelmes, akkor $\mathrm{Im}(A + B) \subseteq \mathrm{Im}(A) + \mathrm{Im}(B)$, és ezért $r(A + B) \leq r(A) + r(B)$. Adjunk példát olyan esetre, amikor egyenlőség áll, és olyanra is, amikor nem.

11. ***(*)*** Éjfélkor a hétfejű sárkány megjelent a királylánynál, felírt egy 13×21-es 8 rangú valós mátrixot, és a következőket mondta. „Minden reggel megváltoztathatod a mátrix egy elemét. Én minden éjjel eljövök, és én is megváltoztathatom a mátrix egy elemét. Ha a mátrix rangját hétté tudom tenni, akkor felfallak.” Érdemes-e a királylánynak algebrát tanulnia?

A sárkány a királylány húgához is bement. „Neked egy 8 rangú 8×8-as M mátrixot kell most felírnod. Minden reggel meg kell változtatnod a mátrix egy elemét (tehát M-et már holnap reggel is). Én minden éjjel eljövök, és én is megváltoztatom a mátrix egy elemét. Mindketten mindig kötelesek vagyunk egy-egy elemet ténylegesen meg is változtatni. Ha a mátrix rangját hétté tudom tenni, akkor felfallak.” A királylány húga életben maradt-e?

12. *(**)* Bizonyítsuk be, hogy egy tetszőleges K test feletti polinom előáll (konstans szorzó erejéig) egy alkalmas K feletti vektortéren értelmezett lineáris transzformáció karakterisztikus polinomjaként. Igaz-e az állítás karakterisztikus polinom helyett minimálpolinommal? Igaz-e, hogy ha f egy k-adfokú polinom, és $k \leq n$, akkor f (konstans szorzó erejéig) egy alkalmas $n \times n$-es mátrix minimálpolinomja? Függ-e a válasz az alaptesttől?

13. *(**)* Mutassuk meg, hogy ha $J = \lambda E + N$ egy Jordan-blokk, és f egy polinom, akkor $f(J)$-ben a főátló felett csupa nulla áll, és a főátlóval párhuzamos, a főátlótól lefelé számított k-adik „ferde sor” mindegyik eleme $f^{(k)}(\lambda)/k!$, ahol a $^{(k)}$ kitevő k-adik deriváltat jelöl.

14. *(**)* Tegyük föl, hogy egy $A \in \mathbb{Q}^{n\times n}$ mátrix összes sajátértéke racionális. Igazoljuk, hogy ha A diagonalizálható $\mathbb{C}$ felett, akkor diagonalizálható $\mathbb{Q}$ felett is. Igaz-e, hogy A-nak létezik Jordan-alakja $\mathbb{Q}$ fölött?

15. *(**)* Bizonyítsuk be, hogy algebrailag zárt test fölött minden négyzetes mátrix hasonló a transzponáltjához.

16. *(**)* Legyen $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{C}^{k\times k}$ és tekintsük az $n \times k$-as mátrixok $\mathbb{C}^{n\times k}$ vektorterén azt a lineáris transzformációt, ami egy $M \in \mathbb{C}^{n\times k}$ mátrixhoz az $AM - MB \in \mathbb{C}^{n\times k}$ mátrixot rendeli. Igazoljuk, hogy ez a lineáris transzformáció pontosan akkor bijektív, ha A-nak és B-nek nincs közös sajátértéke.

---

17. *(**)* Mutassuk meg, hogy sajátalterek összege direkt összeg (kettőnél több tagra is).

18. *(**)* Bizonyítsuk be, hogy ha $A \in \mathrm{Hom}(V)$ és $m_A = fg$, ahol f és g relatív prímek, akkor V az A-invariáns $\mathrm{Ker}\, f(A)$ és $\mathrm{Ker}\, g(A)$ alterek alterek direkt összege. Ha A-t leszűkítjük ezekre az alterekre, akkor mi lesz a minimálpolinom? Adjunk meg ennek alapján egy olyan bázist, amelyben A mátrixa diagonális blokkokra bomlik, és minden blokk minimálpolinomja egy irreducibilis polinom hatványa.

19. *(**)* Mutassuk meg, hogy ha $AB = BA$, akkor A minden sajátaltere, továbbá $\mathrm{Im}\, A$ és $\mathrm{Ker}\, A$ is B-invariáns altér. Elhagyható-e a felcserélhetőség feltétele?

20. *(**)* Tegyük fel, hogy A egy olyan lineáris transzformáció egy n-dimenziós téren, melynek n különböző sajátértéke van. Igazoljuk, hogy A-nak pontosan 2^n invariáns altere van, továbbá, hogy minden A-val felcserélhető lineáris transzformáció diagonalizálható.

21. *(**)* Legyen V egy $\mathbb{C}$ feletti n-dimenziós vektortér, A pedig egy lineáris transzformáció V-n. Bizonyítsuk be, hogy V-nek minden $0 \leq k \leq n$-re van k-dimenziós A-invariáns altere.

22. *(**)* Végtelen test fölött mely transzformációknak van végtelen sok invariáns altere?

23. *(**)* Legyen V véges dimenziós, $A \in \mathrm{Hom}(V)$ és $0 \neq v \in V$. Jelölje továbbá $m_{A,v}$ azt a minimális fokú normált polinomot, melyre $m_{A,v}(A)v = 0$. Igazoljuk a következőket:

(1) A minimálpolinomja az összes $m_{A,v}$ legkisebb közös többszöröse, midőn v befutja V-t.
(2) $W = \langle v, Av, A^2v, \dots \rangle$ épp a v-t tartalmazó legszűkebb A-invariáns altér.
(3) $\dim(W) = \deg(m_{A,v})$.
(4) Ha A minimálpolinomjának van k-adfokú irreducibilis osztója, akkor A-nak van k-dimenziós invariáns altere.
(5) Egy lineáris transzformáció karakterisztikus polinomja akkor és csak akkor irreducibilis, ha a transzformációnak csak két invariáns altere van (a triviálisak).

Határozzuk meg az $m_{A,v}$ polinomot tetszőleges v esetén, ha A a síkon egy tengelyes tükrözés, egy forgatás, valamint ha A a deriválás a polinomok vektorterén.