# Algebra2 Intenzív verzió

gyakorlófeladatok az 1. ZH-ra

2018. március 26.

1. Igazoljuk, hogy ha $\{v_1, v_2, v_3\}$ lineárisan független egy $\mathbb{R}$ fölötti $V$ vektortérben, akkor $\{29v_1 - 17v_2 + 33v_3, v_2, v_1 + v_2 + v_3\}$ is lineárisan független. Igaz-e a megfordítás?

2. Számítsuk ki a $\begin{pmatrix} 9 & -9 & 0 \\ 4 & -3 & 0 \\ 6 & -12 & -1 \end{pmatrix}$ mátrix karakterisztikus polinomját, minimálpolinomját és Jordan-féle normálalakját (az áttérési mátrixot nem kell meghatározni).

3. Számítsuk ki az $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ mátrix karakterisztikus polinomját, minimálpolinomját, és Jordan-féle normálalakját (az áttérési mátrixot nem kell meghatározni).

4. Transzformáljuk négyzetösszeggé az $x^2 + 4xy + 5y^2 + 2yz + z^2$ kvadratikus alakot.

5. Írjuk fel az $\mathbb{R}$ fölötti $x^2 + 4xy + 3y^2 - 2yz$ (háromváltozós) kvadratikus alak mátrixát, majd alkalmas bázisban alakítsuk (előjeles) négyzetösszeggé.

6. Legyenek $\varphi, \psi$ lineáris transzformációk a $V$ vektortéren. Igazoljuk, hogy $\varphi \circ \psi = 0$ akkor és csak akkor, ha $\mathrm{Im}(\psi) \subseteq \mathrm{Ker}(\varphi)$.

7. Mi a 0 sajátértékhez tartozó $k$-szor $k$-as $J_{0,k}$ Jordan-blokk négyzetének Jordan-féle normálalakja?

8. Legyenek $U_1, \ldots, U_k$ alterek a végesdimenziós $V$ vektortérben. Igazoljuk, hogy
$$\sum_{i=1}^{k} \dim U_i \leq \dim \bigcap_{i=1}^{k} U_i + (k-1) \dim V \ .$$

9. Legyenek $A_1, A_2, A_3, A_4$ olyan 4-szer 4-es valós szimmetrikus mátrixok, amelyeknek a determinánsa pozitív. Igazoljuk, hogy kiválasztható közülük kettő úgy, hogy valamilyen invertálható $S$ mátrixszal $S^T A_i S = A_j$ $(1 \leq i < j \leq 4)$.

10. Tegyük fel, hogy az $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ nem diagonalizálható, de $A^2$ diagonalizálható. Mi $A$ minimálpolinomjában az első fokú tag együtthatója?