Algebra2 Intenzív verzió

1. ZH – megoldások

2018. április 10.

1. A karakterisztikus polinom $(2-x)^3$. A Cayley–Hamilton tétel szerint a minimálpolinom ennek osztója, azaz $x-2$, $(x-2)^2$, vagy $(x-2)^3$. Az elsőnek nyilván nem gyöke a mátrix, a másodiknak viszont igen, ezért $(x-2)^2$ a minimálpolinom. Az egyetlen sajátérték a 2, ehhez a legnagyobb Jordan-blokk 2×2-es. Így a Jordan-féle normálalak $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. A 2-höz tartozó sajátaltér az $\begin{pmatrix} a \\ 0 \\ b \end{pmatrix}$ alakú elemekből áll ($a, b \in \mathbb{C}$).

2. A keresett mátrix $[\beta] = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -3 & 10 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$. A $b_1 = e_1$ első bázisvektorral kezdve a Schmidt-féle ortogonalizációs eljárást $b_2 = e_2 - \frac{\beta(e_1,e_2)}{\beta(e_1,e_1)} e_1 = e_2 + 3e_1$, így $\beta(b_2, b_2) = \beta(e_2 + 3e_1, e_2 + 3e_1) = 10 + 2*3*(-3) + 9 = 1$ és $\beta(b_2, e_3) = \beta(e_2 + 3e_1, e_3) = 1$. Tehát $b_3 = e_3 - \frac{\beta(b_1,e_3)}{\beta(b_1,b_1)} b_1 - \frac{\beta(b_2,e_3)}{\beta(b_2,b_2)} b_2 = e_3 - b_2 = e_3 - e_2 - 3e_1$. Az áttérési mátrix tehát $S = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Az új bázisban a mátrix $[\beta]' = S^T[\beta]S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$. Az áttérési mátrix inverze $S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, így $S^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-3y \\ y+z \\ z \end{pmatrix}$. Tehát a keresett négyzetösszeg alak: $x^2 - 6xy + 10y^2 + 2yz - 2z^2 = (x-3y)^2 + (y+z)^2 - 3z^2$.

3. Ha A egy ilyen mátrix, akkor $A^{29} = 2I$, azaz A gyöke az $x^{29} - 2$ polinomnak, speciálisan az $m_A(x) \in \mathbb{Q}[x]$ minimálpolinom osztója az $x^{29} - 2$-nek. Viszont $x^{29} - 2$ irreducibilis $\mathbb{Q}$ felett (Schönemann–Eisenstein $p = 2$-vel), tehát $m_A(x) = x^{29} - 2$. Ugyanakkor a Cayley–Hamilton tétel szerint $x^{29} - 2 = m_A(x) \mid k_A(x)$, ahol $k_A(x)$ a karakterisztikus polinom. Utóbbi foka megegyezik a tér dimenziójával, ezért 19 dimenzióban nem létezhet ilyen mátrix. 29 dimenzióban van ilyen mátrix, pl.

$$a_{ij} = \begin{cases} 2 & \text{ha } i = 1,\ j = 29; \\ 1 & \text{ha } 2 \le i = j+1 \le 29; \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Végezetül ha a tér dimenziója 37, akkor sincs ilyen mátrix: ha lenne, akkor $k_A(x) = m_A(x)f(x)$ lenne, ahol f foka $37 - 29 = 8$. Node az összes sajátérték gyöke a minimálpolinomnak, speciálisan f gyökei is. Tehát f-nek csak a $\sqrt[29]{2}\varepsilon$ alakú számok lehetnek gyökei, ahol ε egy 29-edik komplex egységgyök. Ezen számok $\mathbb{Q}$ feletti minimálpolinomja szintén $x^{29} - 2$, aminek így osztania kellene $f(x)$-et. Ez nem lehetséges, mert f foka 8.

4. Tegyük fel az állítással ellentétben, hogy $\varphi^2 = 0$. Ez azt jelenti, hogy $\mathrm{Im}(\varphi) \subseteq \mathrm{Ker}(\varphi)$. Viszont a feltétel miatt $\mathrm{Im}(\varphi) \supseteq \mathrm{Im}(\varphi \circ \psi) \supseteq \mathrm{Ker}(\psi \circ \varphi) \supseteq \mathrm{Ker}(\varphi)$, azaz $\mathrm{Ker}(\varphi) = \mathrm{Im}(\varphi)$. Ez páratlan dimenzióban nem lehetséges, hiszen $\dim V = \dim \mathrm{Ker}(\varphi) + \dim \mathrm{Im}(\varphi) = 2 \dim \mathrm{Ker}(\varphi)$.

Páros dimenzióban ez lehetséges: pl. φ képezze az összes páros indexű bázisvektort a 0-ba, a páratlan indexűeket pedig az eggyel nagyobb indexűbe; ψ pedig legyen az identitás.

5. Mivel $g(A)f(A) = m_A(A) = 0$, ezért $\mathrm{Im}(f(A)) \subseteq \mathrm{Ker}(g(A))$ (ehhez nem kell, hogy relatív prímek legyenek). A másik irányhoz az euklideszi algoritmus miatt léteznek olyan $a(x), b(x) \in K[x]$ polinomok, melyekre $1 = f(x)a(x) + b(x)g(x)$. A-t behelyettesítve és egy tetszőleges v vektorral jobbról megszorozva $v = f(A)a(A)v + b(A)g(A)v$. Ha $v \in \mathrm{Ker}(g(A))$, akkor $g(A)v = 0$, azaz $v = f(A) \cdot (a(A)v)$ benne van $f(A)$ képében.

6. $a)$ igaz: mivel $U, W \subseteq U + W$, ezért ha egy $v \in V$ vektor ortogonális minden $U + W$-beli vektorra, akkor ortogonális minden U-beli és W-beli vektorra is. Tehát $(U + W)^\perp \subseteq U^\perp$ és $(U + W)^\perp \subseteq W^\perp$, azaz $(U + W)^\perp \subseteq U^\perp \cap W^\perp$. Megfordítva, ha v merőleges minden $u \in U$ vektorra és minden $w \in W$ vektorra, akkor $\beta(v, u + w) = \beta(v, u) + \beta(v, w) = 0$, azaz v merőleges $U + W$ összes elemére.

   $b)$ nem igaz általában: legyen β mátrixa a standard bázisban $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ és $U := \langle e_1 \rangle$, $W := \langle e_1 + e_2 \rangle$ (e_1 és e_2 a két standard bázisvektor). Ekkor $U^\perp = W^\perp = U^\perp + W^\perp = \langle e_2 \rangle$, de $U \cap W = \{0\}$, azaz $(U \cap W)^\perp = V$. Az $U^\perp \subseteq (U \cap W)^\perp$ (illetve a $W^\perp \subseteq (U \cap W)^\perp$) tartalmazás feltétel nélkül igaz az $a)$ részhez hasonló okokból, így $U^\perp + W^\perp \subseteq (U \cap W)^\perp$. Ha β-ról feltesszük, hogy nemelfajuló (és V végesdimenziós), akkor igaz lesz a $b)$ állításban a másik irányú tartalmazás is: Ennek oka, hogy a két tér dimenziója ekkor megegyezik. Ugyanis tetszőleges $X \leq V$ altérre $\dim X + \dim X^\perp = \dim V$ a 6. feladatsor 3.$c)$ feladat szerint, így

$$\begin{aligned} \dim(U \cap W)^\perp = \dim V - \dim(U \cap W) = \dim V - \dim U - \dim W + \dim(U + W) = \\ = (\dim V - \dim U) + (\dim V - \dim W) - (\dim V - \dim(U + W)) = \\ = \dim U^\perp + \dim W^\perp - \dim(U + W)^\perp \overset{a)}{=} \\ = \dim U^\perp + \dim W^\perp - \dim(U^\perp \cap W^\perp) = \dim(U^\perp + W^\perp) \end{aligned}$$

   közben felhasználva a $\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$ összefüggést is.

7. Válasz: a páros n-ekre. Legyen A egy ilyen mátrix, és $m_A(x)$ a minimálpolinom, $k_A(x)$ pedig a karakterisztikus polinom. Tegyük fel továbbá indirekten, hogy n páratlan. Ha $m_A(x) = f(x)g(x)$, ahol f és g sem konstans, akkor $\{0\} \neq \mathrm{Im}(f(A)) \subseteq \mathrm{Ker}(g(A)) \subsetneq V$ invariáns alterek. Mivel egyetlen ilyen közbülső altér van, ezért ez $\mathrm{Im}(f(A)) = \mathrm{Ker}(g(A))$. Sőt, f és g szerepét felcserélve $\mathrm{Im}(f(A)) = \mathrm{Ker}(g(A)) = \mathrm{Im}(g(A)) = \mathrm{Ker}(f(A))$. Ez ellentmondás, hiszen ekkor $n = \dim \mathrm{Ker}(f(A)) + \dim \mathrm{Im}(f(A)) = 2 \dim \mathrm{Ker}(f(A))$ páros lenne. Tehát $m_A(x)$ irreducibilis, így a 3-as feladathoz hasonlóan $k_A(x)$ az $m_A(x)$ egy hatványa (előjeltől eltekintve). Ha van egy $\{0\} \neq U \lneq V$ nemtriviális invariáns altér, akkor $k_A(x)$ nem lehet irreducibilis, hiszen az U-ra vett megszorítás karakterisztikus polinomja osztója. Így $m_A(x) \neq k_A(x)$ (hiszen előbbi irreducibilis), azaz $m := \deg m_A(x) < n$. Viszont ez esetben tetszőleges $0 \neq v \in V$ vektorra $\langle v, Av, \ldots, A^{m-1}v \rangle$ egy A-invariáns altér, melynek dimenziója m. Ráadásul ha egy $w \notin \langle v, Av, \ldots, A^{m-1}v \rangle$ vektort választva a $\langle w, Aw, \ldots, A^{m-1}w \rangle$ kapunk két nemtriviális invariáns alteret is, ami ellentmondás. Azt kaptuk, hogy n páros. Páros n-re pedig van is ilyen A: az kell, hogy $k_A(x) = m_A(x) = f(x)^2$ legyen egy $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ irreducibilis polinomra (ilyen A létezik is a 4. feladatsor 3.$b)$ feladat (megoldása) szerint). Ekkor ha $\{0\} \neq U \lneq V$ egy invariáns altér, akkor az U-ra való megszorítás karakterisztikus polinomja $f(x)$ kell legyen (hiszen $k_A(x)$ egy nemtriviális osztója), viszont akkor ezen az altéren ugyanez a minimálpolinom is. Vagyis $U = \mathrm{Ker}(f(A))$ az egyetlen invariáns altér. (Mj.: Meggondolható, hogy a $k_A(x) = m_A(x) = f(x)^2$, ahol f irreducibilis egy szükséges és elégséges feltétel arra, hogy pontosan 1 nemtriviális invariáns altér legyen.)