Algebra2 Intenzív verzió

2. ZH

2018. május 10.

A maximális pontszám minden feladatra 10 pont. A ZH jegye a pontszám tizedének egészrésze. Használni egy A4-es kézzel írott lapot lehet – számológépet, mobiltelefont viszont nem. A rendelkezésre álló idő 120 perc. Minden beadott lapon szerepeljen a szerző neve. Mindenkinek eredményes feladatmegoldást kívánok!

1. Határozzuk meg az $5x^2 - 4xy + 2y^2 = 6$ egyenletű síkgörbe két szimmetriatengelyét és típusát (ellipszis/hiperbola/kör/üres halmaz/pont/egyenespár), továbbá a görbe szimmetriatengelyeken levő pontjait.
2. Adjunk meg egy ortonormált bázist az $\mathbb{R}^3$ euklideszi tér $x + y - 2z = 0$ egyenletű síkjában.
3. Igazoljuk, hogy ha A és B önadjungált, akkor AB akkor és csak akkor önadjungált, ha A és B felcserélhető.
4. Igazoljuk, hogy ha A egy $\mathbb{C}$ feletti $n \times n$-es mátrix, akkor A és A^*A rangja megegyezik.
5. Legyen $0 \neq z \in \mathbb{H}$ egy tisztán képzetes kvaternió. Hány dimenziós alteret alkotnak $\mathbb{R}$ fölött azon $x \in \mathbb{H}$ kvaterniók, melyekre $xz = -zx$?
6. Igazoljuk, hogy az $\mathbb{R}$ feletti n-dimenziós euklideszi téren minden ortogonális transzformáció előáll legfeljebb n tükrözés egymásutánjaként. Tükrözés alatt $n-1$-dimenziós hipersíkra való tükrözést értünk.
7. Igazoljuk, hogy φ ($\mathbb{C}$ fölötti lineáris transzformáció) akkor és csak akkor normális, ha φ és φ^* sajátvektorai ugyanazok.