

Algebra2 Intenzív verzió

8. gyakorlat

2018. április 17-18.

1. Igazoljuk, ha $\varphi^2 = 0$, akkor $\varphi(v) \perp \varphi^*(v)$ minden $v \in V$ -re. Igaz-e a megfordítás \mathbb{R} illetve \mathbb{C} felett?
 2. Igazoljuk, hogy $\text{Ker}(\varphi^*) = \text{Im}(\varphi)^\perp$ és $\text{Im}(\varphi^*) = \text{Ker}(\varphi)^\perp$.
 3. Bizonyítsuk be, hogy $\varphi^*\varphi = 0$ -ból következik, hogy $\varphi = 0$.
 4. Bizonyítsuk be, hogy ha $\varphi^*\psi = 0$, akkor $\text{Im}(\varphi) + \text{Im}(\psi) = \text{Im}(\varphi) \oplus \text{Im}(\psi)$.
 5. Mutassuk meg, hogy egy normális transzformáció sajátalterei páronként merőlegesek. Igaz-e a megfordítás?
 6. Legyenek φ és ψ normális transzformációk. Igaz-e, hogy ha felcserélhetők, akkor megegyeznek a sajátvektoraik? Igaz-e a megfordítás?
 7. Igazoljuk, hogy a φ transzformáció pontosan akkor normális, ha $\|\varphi(v)\| = \|\varphi^*(v)\|$ minden $v \in V$ -re.
 8. Mutassuk meg, hogy egy transzformáció akkor és csak akkor merőlegességtartó, ha egy unitér (illetve ortogonális) transzformáció skalárszorosa.
 9. A sík forgatásai, tükrözései, nyírásai közül melyek ortogonálisak illetve szimmetrikusak? A bázis a szokásos. Változik-e az eredmény ha egy másik ortonormált bázist veszünk?
 10. Bizonyítsuk be, hogy ha φ ortogonális és szimmetrikus, akkor φ^2 az identitás. Megfordítható-e ez az állítás?
 11. Transzformáljuk négyzetösszeggé **ortonormált bázisban** a $-x^2 + 10xy - y^2 - z^2$ és $-3x\bar{x} + 4ix\bar{y} - 4i\bar{x}y + 3y\bar{y} - z\bar{z}$ kvadratikus alakokat. Döntsük el, hogy az $x^2 + xy + y^2 = 1$, ill. az $x^2 + 4xy + y^2 = 3$ egyenletű síkgörbe ellipszis vagy hiperbola, és határozzuk meg a szimmetriatengelyeiket!
 12. Legyen α egy pozitív definit, β pedig egy tetszőleges szimmetrikus bilineáris függvény egy véges dimenziós \mathbb{R} vagy \mathbb{C} feletti vektortéren. Bizonyítsuk be, hogy alkalmas bázisban α is és β is diagonális. Szükséges-e feltenni, hogy α (vagy β) pozitív definit?
 13. Igazoljuk, hogy A akkor és csak akkor normális, ha A^* polinomja A -nak.
 14. Határozzuk meg a valós euklideszi síkon az összes normális transzformációt.
-
- Nehezebb feladatok*
15. Igaz-e, hogy ha két $\mathbb{R}^{n \times n}$ -beli mátrix \mathbb{C} fölött hasonló, akkor \mathbb{R} fölött is?