Algebra2 Intenzív verzió

7. gyakorlat

2018. április 10-11.

1. Egy β nemelfajuló szimmetrikus bilineáris függvénnyel ellátott V vektorteret *izotróp*nak nevezünk, ha van olyan $v \in V$ vektor, amire $\beta(v, v) = 0$. Igazoljuk, hogy ha V izotróp és $\mathrm{char}(K) \neq 2$, akkor minden $a \in K$-ra létezik olyan $v \in V$, amelyre $\beta(v, v) = a$ (azaz β *univerzális*).

2. Legyen $\dim V \geq 2$, $K = \mathbb{F}_p$, $p > 2$, és β nemelfajuló. Igazoljuk, hogy β univerzális.

---

3. Tekintsük a $-3x\overline{x} + 4ix\overline{y} - 4i\overline{x}y + 3y\overline{y} - z\overline{z}$ kvadratikus alakot $\mathbb{C}$ felett. Írjuk fel a mátrixát, transzformáljuk négyzetösszeggé, végül határozzuk meg a karakterét.

4. Igazoljuk, hogy minden komplex bilineáris (azaz másfélliineáris) függvény egyértelműen írható $\alpha + \beta i$ alakban, ahol α és β Hermite-ikus.

---

5. Legyen V egy $\mathbb{R}$ vagy $\mathbb{C}$ fölötti euklideszi tér. Igazoljuk a háromszögegyenlőtlenséget: $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$, ha $u, v \in V$. Itt $\|u\|$ a vektor hosszát jelöli, azaz $\|u\| := \sqrt{(u, u)}$.

6. Legyen e_1, e_2, e_3 a 3-dimenziós euklideszi tér egy ortonormált bázisa. Bizonyítsuk be, hogy az
$$\left\{ a_1 = \frac{1}{3}(2e_1 + 2e_2 - e_3); \quad a_2 = \frac{1}{3}(2e_1 - e_2 + 2e_3); \quad a_3 = \frac{1}{3}(-e_1 + 2e_2 + 2e_3) \right\}$$
is ONB.

7. Álljon a $W \leq \mathbb{R}^4$ altér azokból a vektorokból, melyek koordinátaösszege nulla. Határozzuk meg az $(1, 2, 3, 4)$ pont távolságát ettől a „hipersík”-tól.

8. Legyen $b_1, \dots, b_n$ bázis egy euklideszi térben. Bizonyítsuk be, hogy pontosan egy olyan $c_1, \dots, c_n$ bázis létezik, melyre $(b_i, c_j) = \delta_{ij}$.

9. Egy n-dimenziós valós euklideszi térben maximálisan hány olyan nemnulla vektor adható meg, melyek közül bármely kettő szöge α, ha $\alpha = 60°$, illetve ha $\alpha = 120°$?

Nehezebb feladatok

10. Mely β komplex bilineáris függvényekre igaz, hogy $\beta(u, v) = 0 \iff \beta(v, u) = 0$?