Algebra2 Intenzív verzió

6. gyakorlat

2018. március 20-21.

1. Tekintsük a $-x^2 + 10xy - y^2 - z^2$ kvadratikus alakot $\mathbb{R}$ felett. Írjuk fel a mátrixát, transzformáljuk négyzetösszeggé, végül határozzuk meg a karakterét.

2. Mely testek fölött diagonalizálható az $x_1y_2 + x_2y_1$ szimmetrikus bilineáris függvény? A valós test esetében adjuk meg az összes ortogonális bázist.

3. Legyen β egy tetszőleges szimmetrikus bilineáris függvény egy (végesdimenziós) V vektortéren, $U \leq V$ pedig egy tetszőleges altér, legyen továbbá $\widetilde{\beta}\colon V \to V^*$ a β által indukált lineáris leképezés. Igazoljuk az alábbiakat:

   (a) $v \in U^\perp$ akkor és csak akkor, ha $\widetilde{\beta}(v) \in V^* = \mathrm{Hom}_K(V, K)$ lineáris függvény megszorítása az U altérre 0. Tehát a $V \xrightarrow{\widetilde{\beta}} V^* \twoheadrightarrow U^*$ kompozíció magja éppen $U^\perp$.

   (b) A $\{f \in V^* \mid f(U) = 0\} \leq V^*$ altér azonosítható $(V/U)^*$-gal. Speciálisan $\dim V - \dim U$ dimenziós.

   (c) $\dim U + \dim U^\perp \geq \dim V$ mindig, és ha β nemelfajuló, akkor =-ség áll fenn.

   (d) $U \subseteq (U^\perp)^\perp$ és ha β nemelfajuló, akkor egyenlőség van.

4. Legyen q kvadratikus alak egy valós feletti vektortéren, $e_1, \dots, e_n$ egy q-ortogonális bázis, és $U = \langle e_i \mid q(e_i) > 0\rangle$, $V = \langle e_i \mid q(e_i) \geq 0\rangle$, $W = \langle e_i \mid q(e_i) = 0\rangle$. E három altér közül melyek függetlenek az $e_1, \dots, e_n$ bázistól?

5. Ellentmond $x^2 + y^2 + (x + y)^2 = (\sqrt{3}x)^2 + (\sqrt{3}y)^2 - (x - y)^2$ a tehetetlenségi tételnek? (Mindkettő négyzetösszeg, de az egyikben van egy mínusz előjel is. Hogy lehet ez?)

6. Legyen β nemelfajuló bilineáris függvény. Igaz-e, hogy tetszőleges $v_1, \dots, v_n$ vektorok akkor és csak akkor függetlenek, ha a $|((\beta(v_i, v_j)))|$ determináns nullától különböző?

7. Mely valós szimmetrikus bilineáris függvényekre eleme minden nem nulla vektor egy ortogonális bázisnak?

Nehezebb feladatok

8. Legyen β egy bilineáris függvény. Bizonyítsuk be, hogy $u \perp_\beta v$ akkor és csak akkor szimmetrikus reláció, ha β szimmetrikus vagy alternáló.

9. Adjunk példát olyan K testre, melyre $|K^\times : (K^\times)^2| = 4$, illetve olyan K testre is, melyre $|K^\times : (K^\times)^2| = 8$.

10. Legyenek a $P_n(x)$ polinomok a következőképpen definiálva:

$$P_0(x) := 1, \quad P_n(x) := \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n \left((x^2-1)^n\right)}{dx^n} \quad (n \geq 1).$$

Bizonyítsuk be, hogy a valós együtthatós polinomok vektorterében a $P_n(x)$ polinomok ortogonális rendszert alkotnak, ha a skalárszorzatot az

$$(f,g) := \int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt$$

képlettel definiáljuk. (Ezek az ún. Legendre-polinomok.)

11. Adjuk meg explicite $P_n(x)$-et $1 \leq n \leq 4$ esetén és bizonyítsuk be, hogy $P_n(1) = 1$ minden n-re teljesül.

12. Bizonyítsuk be, hogy $P_n(x)$-nek pontosan n különböző valós gyöke van, amelyek mind a $(-1,1)$ nyílt intervallumba esnek.

13. Keressünk olyan skaláris szorzást a valós együtthatós polinomok vektorterén, melyre nézve a $T_n(\cos\alpha) = \cos n\alpha$ képlettel definiált Csebisev-polinomok ortogonális rendszert alkotnak.