# Algebra2 Intenzív verzió

5. gyakorlat

2018. március 13-14.

1. Legyen $K$ test, $\lambda \in K$, és $M$ az az $n \times n$-es Jordan-blokk, melynek főátlójában $\lambda$, alatta, vele párhuzamosan csupa 1-es, a mátrix többi helyén pedig mindenütt nulla áll. Igazoljuk, hogy ha $f \in K[x]$, akkor az $f(M)$ mátrix elemei a következők: a főátló felett csupa nulla áll, és a főátlóval párhuzamos, a főátlótól lefelé számított $k$-adik „ferde sor" mindegyik eleme $f^{(k)}(\lambda)/k!$, ahol a $^{(k)}$ kitevő $k$-adik deriváltat jelöl ($0 \leq k \leq n-1$).

2. Határozzuk meg az $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$ mátrix Jordan-normálalakját, majd számítsuk ki a 2014-edik hatványát.

3. Hányféle lehet egy $6 \times 6$-os nilpotens mátrix Jordan-féle normálalakja?

4. Jelölje $J_{\lambda,k}$ a $k \times k$-as, $\lambda$ sajátértékhez tartozó Jordan-blokkot.
   *a*) Határozzuk meg $J_{\lambda,k}$ minimálpolinomját.
   *b*) Hogyan határozható meg egy mátrix (transzformáció) Jordan-normálalakjából a minimálpolinom?
   *c*) Igazoljuk, hogy egy (komplex elemű, négyzetes) mátrix minimálpolinomja pontosan akkor egyezik meg a karakterisztikus polinomjával, ha minden sajátértéke csak egy Jordan-blokkban fordul elő. Hány független sajátvektor tartozik ilyenkor egy-egy sajátértékhez?
   *d*) Adjunk új bizonyítást a Cayley-Hamilton-tételre komplex elemű mátrixok esetén.

5. Legyen $f_0 = f_1 = 1$ és $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$ minden $n \geq 2$-re. Igazoljuk, hogy $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{n-1} \\ f_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_n \\ f_{n+1} \end{pmatrix}$. Az $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ mátrix diagonalizálásával adjunk képletet az $n$-edik hatványára és így $f_n$-re.

6. Egy $K[\lambda]^{n \times n}$-beli mátrixot $\lambda$-mátrixnak nevezünk. Egy $\lambda$-mátrix *elemi átalakításának* a következő lépések valamelyikét nevezzük:
   (*i*) Két sor (vagy oszlop) cseréje.
   (*ii*) Egy sorhoz (ill. oszlophoz) hozzáadjuk egy másik sor (ill. oszlop) polinomszorosát.
   (*iii*) Egy sort vagy oszlopot megszorzunk egy $0 \neq c \in K$ számmal.

   Bizonyítsuk be, hogy minden $\lambda$-mátrix elemi átalakításokkal $\begin{pmatrix} f_1(\lambda) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & f_n(\lambda) \end{pmatrix}$ diagonális alakra hozható, ahol $f_i(\lambda) \mid f_{i+1}(\lambda)$ ($i = 1, \ldots, n-1$) és minden $f_i$ főegyütthatója 1.

7. Jelölje egy $n \times n$-es $\lambda$-mátrix összes $k \times k$-as aldeterminánsának („minorjának”) legnagyobb közös osztóját $D_k(\lambda)$. (Tehát $D_1(\lambda)$ az összes elem legnagyobb közös osztója, $D_n(\lambda)$ a mátrix determinánsa.) Bizonyítsuk be, hogy ha két $\lambda$-mátrix ekvivalens (azaz elemi átalakításokkal egymásbavihető), akkor rájuk ugyanaz a $D_k(\lambda)$ adódik minden $1 \leq k \leq n$-re.

8. Bizonyítsuk be, hogy $D_{k-1}(\lambda) \mid D_k(\lambda)$ $(2 \leq k \leq n)$. A $d_k(\lambda) := \frac{D_k(\lambda)}{D_{k-1}(\lambda)}$ hányadosokat a mátrix *invariáns osztóinak* nevezzük.

9. Mit jelent az, ha $D_r(\lambda) \neq 0$, de $D_{r+1}(\lambda) = 0$?

10. Bizonyítsuk be, hogy az alábbi feltételek az $A$ és $B$ $\lambda$-mátrixokra ekvivalensek:

    *a*) $A$ és $B$ ekvivalens

    *b*) $A$-ra illetve $B$-re kiszámolva $D_k(\lambda)$-t, ugyanazt kapjuk

    *c*) Léteznek olyan $P, Q$ $\lambda$-mátrixok, melyek determinánsa $\neq 0$ konstans, és $PAQ = B$.

11. Legyen $K$ algebrailag zárt. Az $A \in K^{n \times n}$ mátrixra készítsük el az $A - \lambda I$ $\lambda$-mátrixot, tekintsük annak $d_1(\lambda), \ldots, d_r(\lambda)$ $(d_{r+1}(\lambda) = \cdots = d_n(\lambda) = 0)$ invariáns osztóit és azok $d_i(\lambda) = (\lambda - \lambda_1^{(i)})^{n_1^{(i)}} \ldots (\lambda - \lambda_{k_i}^{(i)})^{n_{k_i}^{(i)}}$ gyöktényezős felbontásait. A $(\lambda - \lambda_j^{(i)})^{n_j^{(i)}}$ polinomok összességét az $A$ mátrix *elemi osztóinak* nevezzük. (Tehát pl. ha az invariáns osztók $1$, $\lambda$, $\lambda^2(\lambda+1)$, $\lambda^2(\lambda+1)^2$, akkor az elemi osztók: $\lambda$, $\lambda^2$, $\lambda^2$, $\lambda+1$, $(\lambda+1)^2$.) Mutassuk meg, hogy az elemi osztók ekvivalencia erejéig meghatározzák a $\lambda$-mátrixot (ha még az $r$ rangot is ismerjük).

12. Legyen $K$ algebrailag zárt. Mutassuk meg, hogy az $A, B \in K^{n \times n}$ mátrixok akkor és csak akkor hasonlók, ha az $A - \lambda I$ és $B - \lambda I$ $\lambda$-mátrixok ekvivalensek.

13. A fentiekből állítsunk össze egy módszert egy $A \in K^{n \times n}$ mátrix Jordan-féle normálalakjának meghatározására.

14. Hogyan lehet az elemi osztók segítségével meghatározni a minimálpolinomot?

15. Bizonyítsuk be, hogy algebrailag zárt test fölött minden négyzetes mátrix hasonló a transzponáltjához.

---

*Nehezebb feladatok*

16. Az 6.-10. feladatok megoldásában mit használtunk ki a $K[\lambda]$ gyűrűről? Igazoljuk, hogy minden véges Abel-csoport felbontható $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ alakú (azaz *ciklikus*) csoportok direkt szorzatára.

17. *a*) Melyek azok a $k \times k$-as mátrixok, amelyek felcserélhetőek $J_{\lambda,k}$-val?

    *b*) Tegyük föl, hogy az $M \in \mathbb{C}^{k \times k}$ mátrix Jordan-normálalakja egyetlen blokkból áll. Igazoljuk, hogy az $M$-mel felcserélhető mátrixok halmaza $\{p(M) \mid p \in \mathbb{C}[x]\}$.

    *c*) Igazoljuk a fenti állítás megfelelőjét abban az általánosabb esetben, amikor $M$ minden sajátértéke csak egy Jordan-blokkban fordul elő.

    *d*) És általában $\{A \in \mathbb{C}^{k \times k} \mid AM = MA\} =$?