Algebra2 Intenzív verzió

10. gyakorlat

2018. május 15–16.

1. Hogyan kell összeadni, illetve szorozni két p-adikus alakban felírt racionális számot?
2. Legyen p egy prímszám. Írjuk fel a -1-et $-1 = a_0 + a_1p + \dots + a_np^n + \dots \in \mathbb{Q}_p$ konvergens összeg alakban, ahol $a_n \in \{0, 1, \dots, p-1\}$ minden $n \geq 0$-ra. Segítség: a_0 csak $p-1$ lehet, hiszen $|a_0 + 1|_p = |p|_p|a_1 + a_2p + \dots|_p \leq \frac{1}{p}$.
3. Írjuk fel a $2/3$-ot és a $-2/3$-ot 5-adikus alakban, azaz $a_0 + a_15 + \dots + a_n5^n + \dots$ alakban, ahol $a_n \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ $(n \geq 0)$.
4. Hány megoldása van az $x^2 = 2$ egyenletnek $\mathbb{Q}_7$-ben?

---

5. Igazoljuk, hogy $K(a, b) \cong K(a, -ab) \cong K(b, -ab)$, továbbá ha $0 \neq u, v \in K$, akkor $K(a, b) \cong K(au^2, bv^2)$.
6. Igazoljuk, hogy $K(1, b) \cong M_2(K)$.
7. *a)* Legyen p egy $4k-1$ alakú prímszám. Igazoljuk, hogy ha $x, y \in \mathbb{Q}$, akkor $x^2 + y^2$ prímtényezős felbontásában a p csak páros hatványon szerepelhet.

   b) Legyen $p \neq q$ két $4k-1$ alakú prímszám. Igazoljuk, hogy q nem áll elő $p(x^2 + y^2)$ alakban $(x, y \in \mathbb{Q})$.

   c) Mutassuk meg, hogy $\mathbb{Q}(-1, -p) \ncong \mathbb{Q}(-1, -q)$.

Nehezebb feladatok

8. Legyen $\varepsilon \in 1 + p\mathbb{Z}_p$ (azaz $\frac{\varepsilon - 1}{p}$ is p-adikus egész, azaz p-adikus abszolútértéke ≤ 1) és $\alpha = a_0 + a_1p + a_2p^2 + \dots$ egy p-adikus egész, melynek jelöljük s_n-nel az n-edik kezdőszeletét, azaz $s_n = a_0 + a_1p + \dots + a_np^n \in \mathbb{Z}$. Igazoljuk, hogy az $\varepsilon^\alpha := \lim_{n\to\infty} \varepsilon^{s_n}$ limesz létezik $\mathbb{Z}_p$-ben.
9. Igazoljuk, hogy ha $(a, p) = 1$ $(a \in \mathbb{Z})$, akkor az a^{p^n} sorozat konvergál $\mathbb{Q}_p$-ben.
10. Igazoljuk, hogy minden $n \geq 1$ egész számra létezik $\mathbb{Q}_p$ fölött n-edfokú irreducibilis polinom.
11. Igazoljuk, hogy az $x^{p-1} = 1$ egyenletnek pontosan $p-1$ megoldása van $\mathbb{Q}_p$-ben. Speciálisan $\mathbb{Q}_p$-ben van primitív $p-1$-edik egységgyök.
12. *a)* Legyen p egy páratlan prímszám. Igazoljuk, hogy minden $1 + px$ $(x \in \mathbb{Z}_p)$ alakú elemnek van négyzetgyöke $\mathbb{Z}_p$-ben. (Segítség: fejtsük hatványsorba az $\sqrt{1 + px}$ függvényt, és lássuk be, hogy $|x|_p \leq 1$ esetén konvergens a hatványsor.)

    b) Legyen p páratlan prím és $\alpha = p^{-N}a_{-N} + \dots + a_np^n + \dots \in \mathbb{Q}_p$ $(a_n \in \{0, 1, \dots, p-1\}$ minden $n \geq -N$-re és $a_{-N} \neq 0)$. Igazoljuk, hogy α-nak pontosan akkor van négyzetgyöke $\mathbb{Q}_p$-ben, ha N páros és a_{-N} kvadratikus maradék modulo p.

c) Legyen p páratlan prím. Igazoljuk, hogy $|\mathbb{Q}_p^\times : (\mathbb{Q}_p^\times)^2| = 4$.

d) Mutassuk meg, hogy ha p páratlan prím, akkor izomorfia erejéig pontosan kettő kvaternióalgebra van $\mathbb{Q}_p$ fölött: az egyik $M_2(\mathbb{Q}_p)$, a másik pedig egy ferdetest.

Megjegyzés: ha $p = 2$, akkor hasonlóan belátható, hogy $|\mathbb{Q}_2^\times : (\mathbb{Q}_2^\times)^2| = 8$, viszont ebben az esetben is csak egyetlen kvaternióalgebra van $M_2(\mathbb{Q}_2)$-n kívül.