Mat. I. (BSc.) **Algebra2: 3. vizsgadolgozat (normál), I. rész** *2013. jan. 17.*

NÉV: ____________________ Neptun AZONOSÍTÓ: __________

I. rész (30 perc). *Minden teljesen precíz és korrekt válaszért 1 pont jár, a többiért* 0. *Indokolni nem kell. Aki itt nem ér el legalább 7 pontot, annak a dolgozata elégtelen, és ekkor a második és a harmadik részt ki sem javítjuk.*

1. Definiáljuk, mit jelent az, hogy a $v_1, \dots, v_n$ vektorok generátorrendszert alkotnak a T test fölötti V vektortérben. Figyeljünk a megfogalmazásban **a kvantorok helyes használatára**.

Minden $v \in V$-re **létezik** olyan $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, melyre $v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$.

2. Definiáljuk a $v_1, \dots, v_n$ vektorrendszer rangját a független részhalmazok segítségével. (Nem a dimenzióval való definíciót kérdezzük.)

$r(v_1, \dots, v_n) = r$, ha $\{v_1, \dots, v_n\}$-nek van r elemű lineárisan független részhalmaza, de bármely $r+1$ elemű részhalmaz lineárisan összefüggő.

3. Definiáljuk egy V vektortér U és W altereinek az összegét a **halmazos jelöléssel**.

$U + W = \{u + w \colon u \in U, w \in W\}$.

4. Fogalmazzuk meg, mit jelent az, hogy egy $A \colon V \to W$ leképezés összegtartó. (Itt V és W egy adott T test fölötti vektorterek.)

Minden $v_1, v_2 \in V$ esetén $A(v_1 + v_2) = A(v_1) + A(v_2)$.

5. Mondjuk ki a lineáris leképezésekre vonatkozó dimenziótételt (felírva azt is, hogy a leképezés honnan hová képez, és az ezen vektorterekre vonatkozó feltételeket).

Ha V végesdimenziós és $A \in \mathrm{Hom}(V, W)$, akkor $\dim \mathrm{Im}\, A + \dim \mathrm{Ker}\, A = \dim V$.

6. Írjuk föl azt a képletet, amely az $A \in \mathrm{Hom}(V, W)$ és $B \in \mathrm{Hom}(U, V)$ lineáris leképezések szorzatának mátrixát adja meg, kiírva azt is, hogy mely bázisokban vesszük ezeket a mátrixokat.

Ha $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ bázis rendre U, V, W-ben, akkor $[AB]_{\mathbf{c}/\mathbf{a}} = [A]_{\mathbf{c}/\mathbf{b}}[B]_{\mathbf{b}/\mathbf{a}}$.

7. Hogyan kapcsolódik az A lineáris transzformáció m_A minimálpolinomja azokhoz az f polinomokhoz, melyeknek A gyöke?

$f(A) = 0 \iff m_A \mid f$, azaz ezek a polinomok m_A többszörösei.

8. Mondjuk ki az adjungált transzformációt a skaláris szorzat segítségével jellemző tételt.

Az A és B pontosan akkor adjungáltak, ha minden v, w vektorra $\langle A(v), w\rangle = \langle v, B(w)\rangle$.

9. Hogy lehet jellemezni a **negatív definit** kvadratikus alakokat a mátrixuk **aldeterminánsai** segítségével?

A $k \times k$-as bal felső sarokaldeterminánsok előjele $(-1)^k$.

10. Definiáljuk, mit jelent az, hogy a $W \leq V$ altér az $A \in \mathrm{Hom}(V)$ lineáris transzformációnak invariáns altere.

Minden $w \in W$ esetén $A(w) \in W$.