

NÉV: _____

ELTE AZONOSÍTÓ: _____

II. rész (60 perc). Minden válaszáért 0 vagy 1 pont jár (negatív pontszám nincs). Indokolni nem kell. Aki elér legalább 10 pontot (és az I. részből is legalább hetet), annak a dolgozata már legalább elégséges; aki viszont nem éri el a 8 pontot, azé biztosan elégtelen (ez utóbbi esetben a harmadik részt ki sem javítjuk). A többi esetben a vizsga eredményessége a másik két részre kapott pontszámtól függ, a részletek és a ponthatárok a harmadik rész feladatlapján találhatóak.

11. Melyik az a vektortéraxióma, amelyben három vektor szerepel?

$$u + (v + w) = (u + v) + w$$

12. Adjunk példát, ami mutatja, hogy az ortogonális mátrixok nem alkotnak alteret az összes $n \times n$ -es mátrixok között \mathbb{R} felett.

Pl. az egységmátrix ortogonális, de a kétszerese nem.

13. Adjunk meg három kétdimenziós alteret az \mathbb{R} fölötti 2×2 -es mátrixok terében, ami tartalmazza az egységmátrixot. Szabad generált altérként is megadni.

$$\text{Pl. } \left\langle E, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle, \left\langle E, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle, \left\langle E, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

14. Legyen $V = \mathbb{R}^9$ az \mathbb{R} fölött és $W = \{\lambda v : \lambda \in \mathbb{R}, v \in V\}$. Mennyi $\dim W$?

9

15. Egy vektor koordinátái a (b_1, b_2) bázisban $(1, 2)$. Mik lesznek a koordinátái a $(b_1, 2b_2)$ bázisban?

 $(1, 1)$

- 16–17. A következő levezetésben azt mutatjuk meg, hogy $\text{Hom}(V, W)$ -ben a skalárral való szorzásra teljesül, hogy $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$ minden $\lambda \in T$ testelem és A, B lineáris leképezés esetén. Minden egyes egyenlőségjelhez írjuk a mellette levő keretbe az X, U, L, G, H betűk egyikét aszerint, hogy annak a lépésnek mi az indoklása. A betűk jelentése:

(X) A, B összegtartó.(U) A, B skalárszoros-tartó.

(L) Leképezés skalárszorosának definíciója.

(G) Leképezések összegének definíciója.

(H) A fentiek közül egyik sem.

(Pontozás: 4 v. 5 helyes válasz: 2 pont;
2 v. 3 helyes válasz: 1 pont;
egyébként: 0 pont.)

$$(\lambda(A + B))(v) = \boxed{\text{L}}$$

$$\lambda((A + B)(v)) = \boxed{\text{G}}$$

$$\lambda(A(v) + B(v)) = \boxed{\text{H}}$$

$$\lambda(A(v)) + \lambda(B(v)) = \boxed{\text{L}}$$

$$(\lambda A)(v) + (\lambda B)(v) = \boxed{\text{G}}$$

$$(\lambda A + \lambda B)(v)$$

18. $A: \mathbb{R}^{2 \times 4} \rightarrow \mathbb{R}^5$ egy injektív lineáris leképezés. Mennyi lehet $\dim \operatorname{Im}(A)$? Nincs ilyen leképezés.
19. Legyen A egy lineáris transzformáció. Tudjuk, hogy $A(c) = 2c - d$ és $A(d) = d$. Mennyi $A^2(c + d)$? $4c - 2d$
20. Egy diagonalizálható mátrix karakterisztikus polinomja $x^3(x+1)$. Mi lehet a minimálpolinomja? Csak $x(x+1)$.
21. Adjunk meg egy nem diagonalizálható $M \in \mathbb{C}^{3 \times 3}$ mátrixot, amelynek pontosan két komplex sajátértéke van. $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$
22. Egy 2×2 -es valós mátrix sajátértékei 3 és -3 . Melyik mátrix lesz M^2 ? $\begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$
23. Az $\begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ mátrix milyen valós c értékekre lesz diagonalizálható ONB-ben \mathbb{R} fölött? Csak $c = 0$ -ra.
24. Az $\begin{pmatrix} 1 & c \\ c & 3 \end{pmatrix}$ mátrix két (különböző sajátértékhez tartozó) sajátvektorának mi a szöge? ($c \in \mathbb{R}$) 90°
25. $\begin{pmatrix} 1 & z \\ z & 7 \end{pmatrix}$ ONB-ben diagonalizálható \mathbb{C} fölött. Mik a $z \in \mathbb{C}$ szám lehetséges értékei? z valós
26. Adjunk meg egy $(i, 2i)$ -re merőleges egységvektort. $(2/\sqrt{5}, -1/\sqrt{5})$
27. Ha $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, akkor mi lesz $a + 2b + 3c$ maximális értéke? Itt $a, b, c \in \mathbb{R}$. $\sqrt{14}$
28. Legyenek u és v merőleges egységvektorok \mathbb{C} fölött. Mennyi lesz $\langle iu + 2v, 3u + (2 - 2i)v \rangle$? $4 - 7i$
29. Egy unitér mátrix determinánsa $r + (3i/5)$. Mik az r valós szám lehetséges értékei? $\pm 4/5$
30. Egy $\begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix}$ mátrixú valós kvadratikus alak az $(1, 1)^T$ vektoron 0 értéket vesz fel, az $(1, 2)^T$ vektoron pedig -1 -et. Mennyi a és b ? $a = b = -1$