Mat. I. (BSc.) **Algebra2: 3. vizsgadolgozat (normál), II. rész** *2013. jan. 17.*

NÉV: ______________________________ ELTE AZONOSÍTÓ: ____________

II. rész (60 perc). *Minden válaszért 0 vagy 1 pont jár (negatív pontszám nincs). Indokolni nem kell. Aki elér legalább 10 pontot (és az I. részből is legalább hetet), annak a dolgozata már legalább elégséges; aki viszont nem éri el a 8 pontot, azé biztosan elégtelen (ez utóbbi esetben a harmadik részt ki sem javítjuk). A többi esetben a vizsga eredményessége a másik két részre kapott pontszámtól függ, a részletek és a ponthatárok a harmadik rész feladatlapján találhatók.*

11. Melyik az a vektortéraxióma, amelyben három vektor szerepel?

12. Adjunk példát, ami mutatja, hogy az ortogonális mátrixok nem alkotnak alteret az összes $n \times n$-es mátrixok között $\mathbb{R}$ felett.

13. Adjunk meg három kétdimenziós alteret az $\mathbb{R}$ fölötti 2×2-as mátrixok terében, ami tartalmazza az egységmátrixot. Szabad generált altérként is megadni.

14. Legyen $V = \mathbb{R}^9$ az $\mathbb{R}$ fölött és $W = \{\lambda v \colon \lambda \in \mathbb{R}, v \in V\}$. Mennyi $\dim W$?

15. Egy vektor koordinátái a (b_1, b_2) bázisban $(1, 2)$. Mik lesznek a koordinátái a $(b_1, 2b_2)$ bázisban?

16–17. A következő levezetésben azt mutatjuk meg, hogy $\mathrm{Hom}(V, W)$-ben a skalárral való szorzásra teljesül, hogy $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$ minden $\lambda \in T$ testelem és A, B lineáris leképezés esetén. Minden egyes egyenlőségjelhez írjuk a mellette levő keretbe az X, U, L, G, H betűk egyikét aszerint, hogy annak a lépésnek mi az indoklása. A betűk jelentése:

(X) A, B összegtartó.
(U) A, B skalárszoros-tartó.
(L) Leképezés skalárszorosának definíciója.
(G) Leképezések összegének definíciója.
(H) A fentiek közül egyik sem.

(*Pontozás:* 4 v. 5 helyes válasz: 2 pont; 2 v. 3 helyes válasz: 1 pont; egyébként: 0 pont.)

$$\big(\lambda(A + B)\big)(v) = \quad \boxed{}$$
$$\lambda\big((A + B)(v)\big) = \quad \boxed{}$$
$$\lambda\big(A(v) + B(v)\big) = \quad \boxed{}$$
$$\lambda\big(A(v)\big) + \lambda\big(B(v)\big) = \quad \boxed{}$$
$$(\lambda A)(v) + (\lambda B)(v) = \quad \boxed{}$$
$$(\lambda A + \lambda B)(v)$$

18. $A\colon \mathbb{R}^{2\times 4} \to \mathbb{R}^5$ egy injektív lineáris leképezés. Mennyi lehet $\dim \operatorname{Im}(A)$?

19. Legyen A egy lineáris transzformáció. Tudjuk, hogy $A(c) = 2c - d$ és $A(d) = d$. Mennyi $A^2(c+d)$?

20. Egy diagonalizálható mátrix karakterisztikus polinomja $x^3(x+1)$. Mi lehet a minimálpolinomja?

21. Adjunk meg egy nem diagonalizálható $M \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ mátrixot, amelynek pontosan két komplex sajátértéke van.

22. Egy 2×2-es valós mátrix sajátértékei 3 és -3. Melyik mátrix lesz M^2?

23. Az $\begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ mátrix milyen valós c értékekre lesz diagonalizálható ONB-ben $\mathbb{R}$ fölött?

24. Az $\begin{pmatrix} 1 & c \\ c & 3 \end{pmatrix}$ mátrix két (különböző sajátértékhez tartozó) sajátvektorának mi a szöge? ($c \in \mathbb{R}$)

25. $\begin{pmatrix} 1 & z \\ z & 7 \end{pmatrix}$ ONB-ben diagonalizálható $\mathbb{C}$ fölött. Mik a $z \in \mathbb{C}$ szám lehetséges értékei?

26. Adjunk meg egy $(i, 2i)$-re merőleges egységvektort.

27. Ha $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, akkor mi lesz $a + 2b + 3c$ maximális értéke? Itt $a, b, c \in \mathbb{R}$.

28. Legyenek u és v merőleges egységvektorok $\mathbb{C}$ fölött. Mennyi lesz $\langle iu + 2v, 3u + (2-2i)v \rangle$?

29. Egy unitér mátrix determinánsa $r + (3i/5)$. Mik az r valós szám lehetséges értékei?

30. Egy $\begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix}$ mátrixú valós kvadratikus alak az $(1,1)^T$ vektoron 0 értéket vesz fel, az $(1,2)^T$ vektoron pedig -1-et. Mennyi a és b?