Mat. I. (BSc.) **Algebra2: 2. vizsgadolgozat (normál), I. rész** *2013. jan. 3.*

NÉV: ______________________________ Neptun AZONOSÍTÓ: ____________

I. rész (30 perc). *Minden teljesen precíz és korrekt válaszért 1 pont jár, a többiért* 0. *Indokolni nem kell. Aki itt nem ér el legalább 7 pontot, annak a dolgozata elégtelen, és ekkor a második és a harmadik részt ki sem javítjuk.*

1. Definiáljuk a halmazos jelöléssel a $v_1, \dots, v_n$ vektorok által generált alteret.

$\langle v_1, \dots, v_n \rangle = \{\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n \mid \lambda_1, \dots, \lambda_n \in T\}$.

2. Definiáljuk a $v_1, \dots, v_n$ vektorrendszer rangját a független részhalmazok segítségével. (Nem a dimenzióval való definíciót kérdezzük.)

$r(v_1, \dots, v_n) = r$, ha $\{v_1, \dots, v_n\}$-nek van r elemű lineárisan független részhalmaza, de bármely $r+1$ elemű részhalmaz lineárisan összefüggő.

3. Írjuk fel az $U + W$ altér dimenzióját megadó képletet.

$\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$.

4. Mondjuk ki a lineáris leképezések előírhatósági tételét.

Ha $b_1, \dots, b_n$ bázis a V vektortérben és $c_1, \dots, c_n$ tetszőleges vektorok az ugyanazon test feletti W vektortérben, akkor pontosan egy olyan $A\colon V \to W$ lineáris leképezés létezik, amelyre $A(b_i) = c_i$ minden $1 \le i \le n$ esetén.

5. Definiáljuk a halmazos jelöléssel az $A : V \to W$ lineáris leképezés magterét.

$\mathrm{Ker}(A) = \{v \in V \;:\; A(v) = 0\}$

6. Legyen $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_n)$ és $\mathbf{c} = (c_1, \ldots, c_n)$ két bázis V-ben, és $S = ((s_{ij}))$ a bázistranszformáció $[A]_{\mathbf{c}/\mathbf{c}} = S^{-1}[A]_{\mathbf{b}/\mathbf{b}}S$ képletében szereplő mátrix. Írjuk föl az S elemeit megadó összefüggést.

Az S mátrix j-edik oszlopa $[c_j]_{\mathbf{b}}$, azaz $c_j = \sum_{i=1}^{n} s_{ij} b_i$.

7. Mondjuk ki a $\mathbb{C}$ fölötti ONB-ben való diagonalizálhatóságról szóló tételt.

Egy $n \times n$-es **komplex** mátrix akkor és csak akkor diagonalizálható **ortonormált bázisban komplex fölött,** ha normális, azaz $M^*M = MM^*$.

8. Írjuk föl képlettel, mit jelent az, hogy egy transzformáció távolságtartó.

$\|A(v) - A(w)\| = \|v - w\|$ minden v és w vektorra.

9. Írjuk fel a háromszög-egyenlőtlenséget. Mikor áll fenn egyenlőség?

Ha $u, v \in V$ (euklideszi tér), akkor $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$.
Egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha u és v egy irányba mutatnak.

10. Mi a **definíciója** annak, hogy a Q kvadratikus alak indefinit? **Nem** a sajátértékekkel vagy az aldeterminánsokkal való jellemzést kérdezzük!

Van olyan $v \in V$, melyre $Q(v) > 0$, és olyan is, melyre $Q(v) < 0$.