Mat. I. (BSc.) **Algebra2: 2. vizsgadolgozat (normál), II. rész** *2013. jan. 3.*

NÉV: ______________________ ELTE AZONOSÍTÓ: ____________

II. rész (60 perc). *Minden válaszért* 0 *vagy* 1 *pont jár (negatív pontszám nincs). Indokolni nem kell. Aki elér legalább* 10 *pontot (és az I. részből is legalább hetet), annak a dolgozata már legalább elégséges; aki viszont nem éri el a* 8 *pontot, azé biztosan elégtelen (ez utóbbi esetben a harmadik részt ki sem javítjuk). A többi esetben a vizsga eredményessége a másik két részre kapott pontszámtól függ, a részletek és a ponthatárok a harmadik rész feladatlapján találhatók.*

11. Melyik az a vektortéraxióma, amelyben az **a**laptestbeli szorzás is szerepel?

$\lambda \cdot (\mu \cdot v) = (\lambda \cdot \mu) \cdot v$

12. Adjuk meg a síknak egy olyan részhalmazát, ami a skalárral való szorzásra nézve zárt, de az összeadásra nem.

Pl. az x és az y tengely uniója.

13. Adjunk meg három kétdimenziós alteret az $\mathbb{R}$ fölötti legfeljebb másodfokú polinomok vektorterében, amely az x polinomot tartalmazza. Szabad generált altérként is megadni.

Pl. $\langle 1, x\rangle$, $\langle x, x^2\rangle$, $\langle x, x^2+1\rangle$.

14. Legyen $0 \neq v \in V = \mathbb{R}^9$ az $\mathbb{R}$ fölött és $W = \{\lambda v \colon \lambda \in \mathbb{R}\}$. Mennyi $\dim W$?

1

15. Egy vektor koordinátái a b_1, b_2 bázisban $(1, 2)$. Mik lesznek a koordinátái a $b_1 + b_2, b_2$ bázisban?

$(1, 1)$

16–17. A következő levezetésben azt igazoljuk, hogy lineáris leképezés skalárszorosa összegtartó. Minden egyes egyenlőségjelhez írjuk a mellette levő keretbe az A, S, L, D, O, N betűk egyikét aszerint, hogy annak a lépésnek mi az indoklása. A betűk jelentése:
(A) Vektortéraxióma.
(S) A összegtartó.
(L) A skalárszoros-tartó.
(D) Leképezés skalárszorosának definíciója.
(O) Leképezések összegének definíciója.
(N) A fentiek közül egyik sem.

(*Pontozás:* 4 v. 3 helyes válasz: 2 pont; 2 helyes válasz: 1 pont; egyébként: 0 pont.)

$$(\lambda A)(v+w) = \quad \boxed{\text{D}}$$
$$\lambda\big(A(v+w)\big) = \quad \boxed{\text{S}}$$
$$\lambda\big(A(v)+A(w)\big) = \quad \boxed{\text{A}}$$
$$\lambda\big(A(v)\big)+\lambda\big(A(w)\big) = \quad \boxed{\text{D}}$$
$$(\lambda A)(v)+(\lambda A)(w)$$

18. $A\colon \mathbb{R}^{2\times 4} \to \mathbb{R}^5$ egy szürjektív lineáris leképezés. Mennyi $\dim \operatorname{Ker}(A)$?	3
19. Egy 2×2-es mátrix sajátértékei 2 és $-i$. Mennyi a determinánsa?	$-2i$
20. Egy 4×4-es mátrix minimálpolinomja $x^2(x+1)$. Mi lehet a karakterisztikus polinomja?	$x^3(x+1)$ vagy $x^2(x+1)^2$.
21. Adjunk meg egy nem diagonalizálható $M \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ mátrixot, amelynek pontosan egy komplex sajátértéke van.	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
22. Melyik $\mathbb{C}^{2\times 2}$-beli mátrix minimálpolinomja $x-i-1$?	$\begin{pmatrix} i+1 & 0 \\ 0 & i+1 \end{pmatrix}$
23. Az $\begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ mátrix milyen valós c értékekre lesz diagonalizálható $\mathbb{C}$ fölött?	Minden c-re.
24. Az $M \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mátrixra $M^2 = 2M - 2E$. Mik a sajátértékei?	$1+i, 1-i$
25. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ d & 0 \end{pmatrix}$ ONB-ben diagonalizálható $\mathbb{C}$ fölött. Mik a d szám lehetséges valós értékei?	$d = \pm 1$
26. Adjunk meg egy $(1,i)$-re merőleges egységvektort.	$(i/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$
27. Ha $a^2+b^2=2$, akkor mi lesz $3a+4b$ maximális értéke? Itt $a,b\in\mathbb{R}$.	$5\sqrt{2} = \sqrt{50}$
28. $\begin{pmatrix} e & f \\ g & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$ egy egybevágósági transzformáció mátrixa $\mathbb{R}$ fölött. Mik az f szám lehetséges valós értékei?	$f = \pm 1/2$
29. Egy valós mátrix egyszerre szimmetrikus és ortogonális. Mik lehetnek a komplex sajátértékei?	± 1
30. Mely valós b értékekre lesz a $\begin{pmatrix} 1 & b \\ b & 4 \end{pmatrix}$ mátrixú kvadratikus alak pozitív definit?	$-2 < b < 2$