Mat. I. (BSc.) **Algebra2: 1. vizsga (normál), I. rész (megoldások)** *2012. dec. 20.*

NÉV: ____________________ ELTE AZONOSÍTÓ: ____________

I. rész (30 perc). *Minden teljesen precíz és korrekt válaszért 1 pont jár, a többiért* 0. *Indokolni nem kell. Aki itt nem ér el legalább 7 pontot, annak a dolgozata elégtelen, és ekkor a második és a harmadik részt ki sem javítjuk.*

1. Definiáljuk, mit jelent az, hogy a $v_1, \dots, v_n$ vektorok lineárisan függetlenek a T test fölött. Figyeljünk a logikailag helyes megfogalmazásra.

   Ha $\lambda_1 v_1 + \dots \lambda_n v_n = 0$, akkor $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$ $(\lambda_1, \dots, \lambda_n \in T)$

2. Definiáljuk a $v_1, \dots, v_n$ vektorrendszer rangját a dimenzió fogalma segítségével.

   $r(v_1, \dots, v_n) = \dim \langle v_1, \dots, v_n \rangle$, azaz a $v_1, \dots, v_n$ által generált altér dimenziója.

3. Írjuk föl azt a képletet, amivel a v vektor i-edik koordinátáját a $b_1, \dots, b_n$ **ortonormált** bázisban $\mathbb{C}$ fölött ki lehet számítani.

   $\langle b_i, v \rangle$

4. Fogalmazzuk meg képlettel mit jelent az, hogy az $A : V \to W$ leképezés skalárszorost tart. (Itt V és W egy adott T test fölötti vektorterek.)

   $A(\lambda v) = \lambda A(v)$ minden $v \in V$ és $\lambda \in T$ esetén.

5. Definiáljuk a halmazos jelöléssel az $A : V \to W$ lineáris leképezés képterét.

   $\mathrm{Im}(A) = \{A(v) \in W \ : \ v \in V\}$

6. Mondjuk ki a Cayley–Hamilton-tételt az $n \times n$-es M mátrixra.

M gyöke a karakterisztikus polinomjának: $k_M(M) = 0$.
Vagy: M minimálpolinomja osztója a karakterisztikus polinomjának: $m_M \mid k_M$.

7. Mondjuk ki a főtengelytételt, figyelve arra is, hogy milyen test fölötti mátrixokról beszélünk.

Egy $n \times n$-es **valós** mátrix akkor és csak akkor diagonalizálható **ortonormált bázisban valós fölött,** ha szimmetrikus, azaz $M^T = M$.

8. Mondjuk ki az $M \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mátrix $\mathbb{C}$ fölötti diagonalizálhatóságát a $\mathbb{C}$ fölötti m_M minimálpolinomjának segítségével jellemző tételt.

M pontosan akkor diagonalizálható, ha m_M minden komplex gyöke egyszeres.

9. Írjuk fel a Cauchy-Bunyakovszkij-Schwartz egyenlőtlenséget. Mikor áll fenn egyenlőség?

Ha $u, v \in V$ (euklideszi tér), akkor $|\langle u, v\rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|$.
Egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha u és v párhuzamosak.

10. Mi a **definíciója** annak, hogy a Q kvadratikus alak pozitív definit? **Nem** a sajátértékekkel vagy az aldeterminánsokkal való jellemzést kérdezzük!

$Q(v) > 0$ minden $v \neq 0$-ra.