

NÉV: _____

Neptun AZONOSÍTÓ: _____

II. rész (60 perc). Minden válaszáért 0 vagy 1 pont jár (negatív pontszám nincs). Indokolni nem kell. Aki elér legalább 10 pontot (és az I. részből is legalább hetet), annak a dolgozata már legalább elégséges; aki viszont nem éri el a 8 pontot, azé biztosan elégtelen (ez utóbbi esetben a harmadik részt ki sem javítjuk). A többi esetben a vizsga eredményessége a másik két részre kapott pontszámtól függ, a részletek és a ponthatárok a harmadik rész feladatlapján találhatóak.

11. Melyik az a vektortéraxióma, amelyben egy vektor és egy skalár szerepel?

$$1v = v$$

12. Adjuk meg a síknak egy olyan részhalmazát, ami az összeadásra nézve zárt, de a skalárral való szorzásra nem.

Pl. az egész koordinátájú vektorok. Vagy a felső félsík.

13. Adjunk meg egy háromdimenziós alteret az \mathbb{R} fölötti $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ vektortérben.

Pl. a felsőháromszög-mátrixok altere.

14. Legyen $b_1 = (2, 1)$ és $b_2 = (1, -1)$. Adjuk meg ebben a bázisban a $(3, 3)$ vektor koordináta(oszlop)vektorát.

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

15. Ha egy vektortérben van ötelemű összefüggő generátorrendszer és háromelemű független rendszer is, akkor mik a dimenzió lehetséges értékei?

3 vagy 4

- 16–17. A következő levezetésben azt igazoljuk, hogy lineáris leképezések összege összegtartó. Minden egyes egyenlőségjelhez írjuk a mellette levő keretbe az A, S, L, O, N betűk egyikét aszerint, hogy annak a lépésnek mi az indoklása. A betűk jelentése:

(A) Vektortéraxióma.

(S) A összegtartó.

(L) B összegtartó.

(O) Leképezések összegének definíciója.

(N) A fentiek közül egyik sem.

(Pontozás: 5 v. 4 helyes válasz: 2 pont;
2 v. 3 helyes válasz: 1 pont;
egyébként: 0 pont.)

$$(A + B)(v + w) = \boxed{O}$$

$$A(v + w) + B(v + w) = \boxed{L}$$

$$A(v + w) + (B(v) + B(w)) = \boxed{S}$$

$$(A(v) + A(w)) + (B(v) + B(w)) = \boxed{A}$$

$$(A(v) + B(v)) + (A(w) + B(w)) = \boxed{O}$$

$$(A + B)(v) + (A + B)(w)$$

18. Ha A és B lineáris leképezések, melyekre $A(v) = 2v$ és $B(v) = 3v$, akkor mennyi $(A^2 + B)(3v)$?
19. Mi az x tengelyre való tükrözés determinánsa?
20. Mennyi annak az $\mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}$ lineáris leképezésnek a rangja, mely egy A mátrixhoz $(A^T - A)$ -t rendel?
21. Egy nem diagonalizálható $\mathbb{C}^{3 \times 3}$ -beli mátrixnak a 0 és 2 is sajátértéke. Mi lehet a minimálpolinomja?
22. Mely $a \in \mathbb{C}$ értékekre lesz az $\begin{pmatrix} a & a+1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ mátrix minimálpolinomja első fokú?
23. Az $M \in \mathbb{C}^{n \times n}$ mátrixra $M^2 = 0$. Mekkora lehet a Jordan-alakjában a legnagyobb blokk mérete?
24. $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ c & 1 \end{pmatrix}$ ONB-ben diagonalizálható \mathbb{R} fölött. Mik a c szám lehetséges valós értékei?
25. Adjunk meg olyan valós mátrixot, ami \mathbb{C} fölött diagonalizálható ONB-ben, de \mathbb{R} fölött nem.
26. Ha $z \in \mathbb{C}$ abszolút értéke 2, akkor mennyi $\|(2z, 4i, 2)^T\|$?
27. Ha $a^2 + 4b^2 = 5$ és $4c^2 + d^2 = 4$, akkor mi lesz $ac + bd$ maximális értéke? Itt $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.
28. Mely $z \in \mathbb{C}$ komplex számokra lesz a $\begin{pmatrix} z & (1+i)/2 \\ (1-i)/2 & (1-i)/2 \end{pmatrix}$ mátrix unitér?
29. Egy mátrix egyszerre önadjungált és unitér. Mely komplex számok lehetnek a sajátértékei?
30. Egy valós kvadratikus alak mátrixa $\begin{pmatrix} b & 1 \\ 1 & -b \end{pmatrix}$. Mi a kvadratikus karaktere?